Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Lineare Algebra 1
SS 2024

Blatt 1

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 30.04, 16:00.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 1 (7 + 3 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

injektiv und surjektiv ist. Bestimmen Sie die inverse Abbildung $f^{-1}\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f_{|\mathbb{Z}^2}\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ injektiv aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Sei X eine Menge und sei $\mathcal{P}(X)$ die Menge von alle Teilmenge von X. Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ definieren wir eine Funktion

$$\mathbf{1}_A\colon X \to \{0,1\}, \qquad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi\colon \mathcal{P}(X) \to \mathrm{Fun}(X,\{0,1\}), \qquad A \mapsto \mathbf{1}_A$$

bijektiv ist.

Aufgabe 3 (2 + 3 Punkte) Seien $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, mit $n \geq 2$ endliche Mengen.

(i) Zeigen Sie, dass $A_1 \cup A_2$ die disjunkte Vereinigung von $(A_1 \setminus A_2), (A_2 \setminus A_1)$ und $A_1 \cap A_2$ ist:

$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \sqcup (A_2 \setminus A_1) \sqcup (A_1 \cap A_2).$$

(ii) Zeigen Sie, dass $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.

(iii) (Freiwillige Aufgabe, hat keine Punkte.) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, das *Prinzip von Inklusion-Exklusion*:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+1} \cdot \left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_h} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_h}| \right)$$

.

Aufgabe 4 (5 Punkte) Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass

$$n! \leq n^n \text{ für alle } n \geq 1$$