Blatt 3

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 14.05, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

(i) Wir definieren eine Verknüpfung auf $\mathbb{Z}$ wie folgt:

$$\oplus \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \qquad (a,b) \mapsto a \oplus b := a + b + 2$$

, wobei $+$ die übliche Addition von ganzen Zahlen ist. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist.

(ii) Wir betrachten die Teilmenge $G = \{5^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}^\times$ und die übliche Multiplikation von rationalen Zahlen. Zeigen Sie, dass die Multiplikation eine Verknüpfung

$$G \times G \to G, \qquad (a,b) \mapsto a \cdot b$$

definiert, und dass G mit dieser Verknüpfung eine abelsche Gruppe ist. Insbesondere müssen Sie zeigen dass $a \cdot b \in G$ für alle $a, b \in G$

Aufgabe 2 (2+3+5 Punkte) Sei R ein kommutativer[1] Ring mit 1. Für $x \in R$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$x^0 := 1, \qquad x^n := x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \qquad (n \text{ mal }), \quad \text{falls } n > 0$$

(i) Zeigen Sie, dass $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ und $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

Wir nehmen nur an dass x invertierbar in R ist. Das bedeutet, dass ein multiplikatives Inverses $x^{-1} \in R$ existiert: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$. Sei $R^\times := \{x \in R \,|\, x \text{ invertierbar }\}$.

(ii) Zeigen Sie dass $R^\times$, zusammen mit der Multiplikation in R

$$R^\times \times R^\times \to R^\times, \qquad (x,y) \mapsto x \cdot y$$

eine abelsche Gruppe ist. Insbesondere müssen Sie zeigen, dass $xy \in R^\times$, falls $x, y \in R^\times$.

Sei $x \in R^\times$. Für alle $n \in \mathbb{Z}, n > 0$ definieren wir

$$x^{-n} := (x^{-1})^n$$

(ii) Zeigen Sie, dass $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ und $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.

[1] Die Aussagen in dieser Aufgabe gelten auch, wenn R nicht kommutativ ist. Das Einzige, was sich ändert, ist, dass die Menge $R^\times$ in Punkt (ii) keine abelsche Gruppe ist, sondern nur eine Gruppe.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

(i) Sei $\Delta \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $\alpha \in \mathbb{C}$ existiert für das $\alpha^2 = \Delta$ gilt. Wir schreiben $\alpha = \sqrt{\Delta}$.

(ii) Sei $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{C}[x]$ ein komplexes Polynom von Grad 2, so dass $a \neq 0$. Wir definieren die Diskriminante von f als $\Delta := b^2 - 4ac$.

Zeigen Sie, dass die Nullstellen von f in $\mathbb{C}$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

sind. Insbesondere, hat f zwei verschiedene Nullstellen, genau dann, wenn $\Delta \neq 0$.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Bestimmen Sie alle Polynome $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ von Grad $\deg(f) \leq 3$ so dass $f(1) = 0, f(-1) = 0, f(i) = f(-i), f(2) = -f(2)$

Zusatzaufgabe (Freiwillig, wird nicht benotet oder korrigiert) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ und seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ paarweise verschiedene. Wir betrachten die Vandermonde Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ definiert als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die einzige Lösung des LGS $Ax = 0$ die Null-Lösung $x = 0$ ist:

$$\mathrm{Los}(A, 0) = \{0\}.$$