Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Lineare Algebra 1
SS 2024

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Blatt 4

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 28.05, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe (5+5 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(i) Seien $n \geq 1$ und $b \in \mathbb{K}^n$. Betrachten Sie die Translation $T_b\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, x \mapsto x + b$ und zeigen Sie, dass T_b eine lineare Abbildung ist, genau dann, wenn $b = 0$.

(ii) Sei $x_0 \in \mathbb{K}$ und sei

$$\mathrm{Ev}_{x_0}\colon \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}, \qquad f(x) \mapsto f(x_0)$$

die Evaluierung bei x_0. Zeigen Sie, dass Ev_{x_0} eine surjektive lineare Abbildung ist.

Aufgabe (3+3+3+1 Punkte) Seien $\mathbb{K}$ ein Körper, A, B zwei Mengen und $\varphi\colon A \to B$ eine Funktion. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi^*\colon \ \mathrm{Fun}(B, \mathbb{K}) \to \mathrm{Fun}(A, \mathbb{K}), \qquad f \mapsto f \circ \varphi$$

(i) Zeigen Sie, dass φ^* eine lineare Abbildung ist, wobei $\mathrm{Fun}(A, \mathbb{K}), \mathrm{Fun}(B, \mathbb{K})$ die Struktur von $\mathbb{K}$-Vektorräumen haben, die wir in den Vorlesungen gesehen haben

(ii) Zeigen Sie, dass wenn φ injektiv ist, dann ist φ^* surjektiv.

(iii) Zeigen Sie, dass wenn φ surjektiv ist, dann ist φ^* injektiv.

(iv) Zeigen Sie, dass wenn φ bijektiv ist, dann ist φ^* ein Isomorphismus.

Aufgabe (2+2+2+2+2 Punkte)

(i) Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit den zwei Abbildungen

$$+\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

$$\star\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \left(\lambda, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda^2 a \\ \lambda^2 b \end{pmatrix}$$

Ist $\mathbb{R}^2$ mit $+$ als Addition und $\star$ als Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Ist der Teilmenge $M = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Ist der Teilmenge $S^1 = \{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1 \}$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$? Begrunden Sie Ihre Antwort.

(iv) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeigen sie dass $\mathbb{K}$ genau zwei $\mathbb{K}$-Untervektorräume hat: $\mathbb{K}$ selbst und $\{0\}$.

(v) Betrachten Sie die Teilmenge $\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{Q}^2 \mid y - \lambda \cdot x = 0\}$, für $\lambda \in \mathbb{Q}$ und zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}^2$ unendliche viele $\mathbb{Q}$-Untervektorräume hat.

Aufgabe (5+5 Punkte) Wir betrachten die folgende Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 4}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

und die entsprechende lineare Abbildung $L_A \colon \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3, x \mapsto Ax$.

(i) Das Bild, $\operatorname{Im} L_A$ ist die Menge von alle Vektoren $b \in \mathbb{Q}^3$ so dass das System $Ax = b$ eine Lösung hat. Bestimmen sie das Bild, $\operatorname{Im} L_A$ durch lineare Gleichungen, wie in Beispiel 2.3.7 in den Notizen.

(ii) Wenn $b \in \operatorname{Im} L_A$, bestimmen Sie die Menge $L_A^{-1}(b) = \operatorname{Los}(A, b)$.

Zusatzaufgabe (Freiwillig, wird nicht benotet oder korrigiert)

(i) Sei $\mathbb{K}$ ein unendlicher Körper. Sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ein Polynom und sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Betrachten Sie die Polynomfunktion

$$f \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \qquad x_0 \mapsto f(x_0)$$

und zeigen Sie dass die Polynomfunktion $f \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ linear ist, genau dann, wenn $f = a_1 \cdot x$.

(ii) Sei $\mathbb{F}_2 = \{[0], [1]\}$ der Körper mit zwei Elementen. Sei $f(x) = x^2 \in \mathbb{F}_2[x]$. Zeigen Sie, dass die Polynomfunktion $f \colon \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2, x_0 \mapsto x_0^2$ die Identität ist. Insbesondere, die Polynomfunktion von f ist linear, auch wenn $f \neq a_1 \cdot x$.
