UNIVERSITÄT TÜBINGEN
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Lineare Algebra 1
SS 2024

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Präsenzblatt

Dieses Blatt wird in der ersten Übungseinheit besprochen.

Aufgabe 1 Seien X, Y zwei Endliche Menge. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathrm{Fun}(X,Y) = \{f \colon X \to Y\}$$

von alle Funktionen von X zu Y eine endliche Menge ist, und dass $|Fun(X,Y)| = |Y|^{|X|}$.

Aufgabe 2 Sei A eine endliche Menge, mit $|A| = n$ und sei $k \in \mathbb{N}$.

(i) Sei $T_k(A) = \{(a_1, \ldots, a_k) \in A^k \mid a_i \text{ paarweise verschiedene } \}$. Zeigen Sie, dass $|T_k(A)| = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

(ii) Sei $\binom{A}{k} = \{B \subseteq A \mid |B| = k\}$ die Menge von alle Teilmenge von A mit k Elemente. Zeigen Sie, dass $|\binom{A}{k}| = \binom{n}{k}$.

Aufgabe 3 (Binomischer Lersatz) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 4 Seien $f \circ X \to Y$ und $g \colon Y \to Z$ zwei Abbildungen.

(i) Wenn $f \circ g$ bijektiv ist, zeigen Sie, dass f surjektiv ist und dass g injektiv ist.

(ii) Zeigen Sie, mit einem Gegenbeispiel, dass f nicht unbedingt injektiv und g nicht unbedingt surjektiv ist.

Aufgabe 5 Sei X eine endliche Menge mit einer Funktion $f \colon X \to X$ so dass $f \circ f = \mathrm{id}_X$ (so eine Funktion heißt eine Involution auf X. Die Teilmenge

$$\mathrm{Fix}(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

enthält die Fixpunkte von f. Wenn $|X|$ ungerade ist, zeigen Sie dass $|\mathrm{Fix}(f)|$ ungerade ist. Wenn $|X|$ gerade ist, zeigen Sie dass $|\mathrm{Fix}(f)|$ gerade ist.

Extra Aufgabe (Zagiers magischer Beweis des Fermatschen Satzes)
Sei $p \in \mathbb{N}$ ein Primzahl in der Form $p = 4k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$. Zum Beispiel $p = 5, 13, 17, \dots$. Wir beweisen, dass p eine Summe von zwei Quadraten ist. Zum Beispiel: $5 = 2^2 + 1, 13 = 2^2 + 3^2, 17 = 4^2 + 1, \dots$.
Wir betrachten die Menge

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \,|\, x^2 + 4yz = p\right\}$$

(i) Zeigen Sie, dass S eine endliche Menge ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon S \to S, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{cases} (z + 2z, z, y - x - z), & \text{falls } x < y - z, \\ (2y - z, y, x - y + z), & \text{falls } y - z < x < 2y, \\ (x - 2y, x - y + z, y), & \text{falls } x > 2y. \end{cases}$$

wohldefiniert ist. Zeigen Sie auch, dass f eine Involution ist.

(iii) Zeigen Sie, dass f genau ein Fixpunkt hat. Ableiten, dass $|S|$ ungerade ist.

(iv) Ableiten Sie, dass die Involution

$$g\colon S \to S, \qquad (x, y, z) \mapsto (x, z, y)$$

ein Fixpunkt hat. Ableiten, dass p die Summe von zwei Quadraten ist.