19.4.24

Mengentheorie

Eine Menge ist eine ungeordnete Ansammlung von Elementen, wobei jedes Element nur einmal vorkommen kann.

(1) Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die selben Elemente enthalten.

(2) Eine Menge A kann auch andere Mengen enthalten, aber nie sich selbst.

Sind folgende Mengen gleich?

(1) $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$

(2) $\{4,4,1\} = \{4,1\}$

(3) $\{\{1,2,3\},4,1\} \neq \{1,2,3,4,1\}$

(4) $\{\{\{\},\{\}\},\{\}\} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

Teilmengen & set-builder notation

$A \subseteq B$: Jedes Element x von A ist Element von B.

$A \subsetneq B$: Es gilt $A \subset B$ und $A \neq B$ „Echte Teilmenge"

Teilmengen definieren: Sei A Menge

$$B = \{x \in A \mid \text{Aussage die für } x \text{ gelten muss, damit es in } B \text{ liegt}\}$$

Bsp

$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist durch 2 teilbar}\}$
$= \{2,4,6,8,\dots\}$

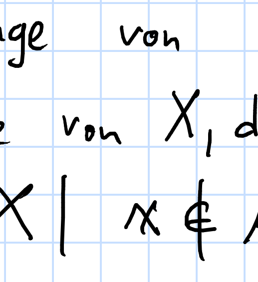
$\{x \in A \mid x \notin A\} = \emptyset$

$\{x \in \mathbb{Q} \mid \text{Es gibt } y \in \mathbb{Q}, \text{ sodass } xy = 1\} = \{\text{alle Zahlen in } \mathbb{Q}, \text{ außer } 0\}$

$\{x \in \mathbb{Z} \mid \text{Es gibt } y \in \mathbb{Z}, \text{ sodass } xy = 1\} = \{1,-1\}$

Vereinigungen, Durchschnitt etc.

$A \cup B = \{\text{Elemente, die in } A \text{ oder } B \text{ enthalten sind}\}$



$A \cap B = \{\text{Elemente, die } A \text{ und in } B \text{ enthalten sind}\}$

$A \setminus B = \{\text{Elemente, die in } A \text{ und nicht in } B \text{ enthalten sind}\}$

Sei A Teilmenge von X.

$A^c = \{\text{Elemente von } X, \text{ die nicht in } A \text{ enthalten sind}\}$
$= \{x \in X \mid x \notin A\}$

! Diese Def. hängt von X ab!

Übung $A = \{1,2,3\}$, $B = \{5,2\}$, $C = \{1\}$

$(A \cup B) \cap C = \{1\}$

$A \cup (B \cap C) = A \cup \emptyset = A$

$(A \setminus B) \cup C = \{1,3\}$

$A \setminus (B \cup C) = A \setminus \{1,2,5\} = \{1\}$

De Morgan'sche Regel

$A, B \subset X$ Komplement bzgl. X

(i) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Beweis:
$$\begin{aligned}(A \cap B)^c &= \{x \in X \mid x \notin A \text{ und } x \notin B\}^c \\ &= \{x \in X \mid \text{Das folgendende gilt nicht: } x \notin A \text{ und } x \notin B\} \\ &= \{x \in X \mid x \notin A \text{ oder } x \notin B\} \\ &= \{x \in X \mid x \notin A\} \cup \{x \in X \mid x \notin B\} \\ &= A^c \cup B^c\end{aligned}$$

Der andere Beweis geht ähnlich. $\square$

(iii) $(A^c)^c = A$

Beweis:
$$\begin{aligned}(A^c)^c &= \{x \in X \mid x \notin A^c\}^c = \{x \in X \mid \neg(x \in A)\} \\ &= \{x \in X \mid x \in A\} = A \quad \square \\ &= \{x \in X \mid \text{Es gilt nicht } x \notin A\}\end{aligned}$$

Potenzmenge

$\mathcal{P}(A) = \{\text{Menge aller Teilmenge von } A\}$

Bsp. $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Gilt $1 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$? Nein, denn 1 ist keine Teilmenge von $\mathbb{N}$ (aber $\{1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$)

Schreibe systematisch $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ hin.

Wieviele Elemente hat $\mathcal{P}(A)$ für eine endliche Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

↳ A hat 2^n Elemente.

Tupel & kartesische Produkte

Ein Tupel ist eine geordnete Liste von Elementen möglicherweise mit Wiederholungen

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Bsp

$(1,2) \neq (2,1)$

$(1,1,2) \neq (1,2)$

Sind A, B Mengen, definieren wir das kartesische Produkt $A \times B$ als die Menge

$$A \times B = \{\text{Tupel } (a,b) \text{ mit } a \in A, b \in B\}$$

Bsp

$\{1, \{\}\} \times \{1,2\}$
$= \{(1,1), (1,2), (\{\},1), (\{\},2)\}$

Funktionen

Seien A, B Menge

Eine Funktion/Abbildung f ist ein Tupel (Γ, A, B), wobei Γ eine Teilmenge von $A \times B$ ist, sodass gilt:

Für jedes $a \in A$ gibt es genau ein Tupel $(a,b) \in \Gamma$.

Schreibweise: $f: \underset{\text{Definitionsmenge}}{A} \longrightarrow \underset{\text{Zielmenge}}{B}$, Γ heißt der Graph von X

$(a,b) \in \Gamma$ wird als $f(a) = b$ oder als $f: a \mapsto b$ geschrieben.

Check Sind dies Funktionen?

$A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$

$f_1 = (\{(1,3)\}, A, B)$ ✗

$f_2 = (\{(1,3),(2,4),(1,4)\}, A, B)$ ✗

$f_3 = (\{(1,1),(2,2)\}, A, B)$ ✗, $f_4 = (\{(1,3),(2,3)\}, A, B)$ ✓

Bsp.

$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto n$ $\qquad$ $g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto n$

verschieden: $f \neq g$!

26.4.2024

Kommentar zu Urbildern:

$f: X \to Y$ sei eine Funktion und $A \subseteq Y$ eine Teilmenge.

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$

f^{-1} steht nicht für die Umkehrfunktion. Eine Umkehrfunktion existiert nur, wenn f bijektiv ist, $f^{-1}(A)$ ist immer definiert.

Spezialfall: $p \in Y$

Die Menge $f^{-1}(\{p\})$ heißt eine Faser von f. Oft schreibt man aus Faulheit $f^{-1}(p)$, obwohl $f^{-1}(\{p\})$ meint (Siehe Übungsblatt).

f injektiv: Alle Fasern von f haben höchstens ein Element.

f surjektiv: Alle Fasern sind nicht leer.

siehe auch „natural number game"

Beispiele für Induktion

(IA) Induktionsanfang (IS) Induktionsschritt (IV) Induktionsvoraussetzung

Z: Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Beweis: (IA) $n = 1$: $1^2 = \frac{1}{3}1^3 + \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{6}$ ✓

(IB) Gelte $(*)$ für ein n.

(IS) Zeige dasselbe für $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2$$
$$= \left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) + n^2 + 2n + 1$$

$$\frac{1}{3}(n+1)^3 + \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}n$$
$$= \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1) + \frac{1}{6}n$$
$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + n^2 + 2n + 1 \quad ✓ \quad \square$$

Z: Die Menge der Bijektionen zwischen zwei endlichen Mengen X & Y der selben Kardinalität n ist $n!$

Beweis: Induktion über $n \in \{0, 1, \dots\}$

(IA) $n = 0$: X & Y sind leer. Es gibt genau eine Funktion $f: \emptyset \to \emptyset$

↪ Der Graph ist die leere Menge

(IB) Die Aussage gelte für Mengen der Größe $n-1$.

(IS) Sei $x \in X$ beliebig. Schreibe $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$

$$\underbrace{\{f: X \to Y \mid f \text{ bijektiv}\}}_{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{\{f: X \to Y \mid f \text{ bijektiv}, f(x) = y_i\}}_{A_i}$$

Die obige Vereinigung erfüllt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

↪ $|A| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$

Ist $f \in A_i$ so ist $f|_{X \setminus \{x\}}: X \setminus \{x\} \to Y \setminus \{y_i\}$ eine Bijektion.

$$|A_i| = |\{f: X \setminus \{x\} \to Y \setminus \{y_i\} \mid f \text{ bijektiv}\}| = (n-1)!$$

(Induktionsbehauptung)

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (n-1)! = n \cdot (n-1)! = n! \quad \square$$

Z: Hat A n Elemente, so gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Beweis: Induktion über n.

(IA) $n = 0$: $A = \emptyset$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\} \rightsquigarrow 2^0$ Elemente

(IB) Gelte die Aussage für $n-1$.

(IS) Sei $a \in A$. Jede Teilmenge von A enthält a oder enthält es nicht.

$$\mathcal{P}(A) = \underbrace{\{B \in \mathcal{P}(A) \mid a \in B\}}_{P} \cup \underbrace{\{B \in \mathcal{P}(A) \mid a \notin B\}}_{Q}$$

Bemerke $P \cap Q = \emptyset$. Außerdem gilt $Q = \mathcal{P}(A \setminus \{a\})$.

Bijektion $f: Q \to P$
$B \mapsto B \cup \{a\}$

(Warum ist das bijektiv)

$$|\mathcal{P}(A)| = |P| + |Q| = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n. \quad \square$$

Z: Sind X, Y endliche Mengen, so gilt $|X \times Y| = |X||Y|$

Beweis: Wir nutzen Induktion über $|X| = n$

(IA) $n = 0$: $X = \emptyset \Rightarrow X \times Y = \emptyset \rightsquigarrow$ hat also $0 \cdot |Y|$ viele Elemente

(IB) Gelte die Aussage für $n-1$.

(IS) Wähle $x \in X$.

$$X \times Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in Y\} \cup (X \setminus \{x\}) \times Y$$

diese Menge sind disjunkt

diese Menge hat genauso viele Elemente wie Y

$$|X \times Y| = |Y| + |(X \setminus \{x\}) \times Y|$$
$$= |Y| + (|X| - 1) \cdot |Y| = |X| \cdot |Y| \quad \square$$

Fibonacci-Zahlen

Induktive Definition: $F_0 = 0, F_1 = 1$ (IA)

Seien alle F_k mit $k < n$ definiert (IB)

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (IS)

$F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, \dots$

Z: $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

Beweis: Induktion über n.

(IA) $n = 0$: $F_1 = 2 - 1 = F_3 - 1$ ✓

(IB) Gelte die Aussage für ein n.

(IS)
$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) + F_{n+1}$$
$$= F_{n+2} - 1 + F_{n+1}$$
$$= F_{n+3} - 1 \quad \square$$

Was haben Fibonacci-Zahlen mit linearer Algebra zu tun?

Bildungsgesetz in Matrix Form

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ mal}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}}$$

↪ Wie berechnet man Potenzen von Matrizen effizient?

Antwort am Ende des Semesters

Lösung von
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

red. Zeilenstufenform:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{2} & 3 & 3 & 4 \\ \boxed{3} & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot(-2) \quad \cdot(-3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot(-1)$$

Zeilenstufenform
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \cdot(-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} x_1 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{array}$$

$$\text{Lös}\left(A, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 3x_3 + 4x_4 \\ -3x_3 - 4x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 2 & 1 \\ \boxed{2} & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \\ \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot(-\tfrac{1}{2})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot(-2) \quad \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \leftarrow \text{reduzierte Zeilenstufenform}$$

2.5.24

LGS anhand von Beispielen $\rightsquigarrow$ Interpolation:

Polynome sind für uns Funktionen der Form

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$$

Wir wollen hier ein Polynom der Form

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

finden, die folgendes erfüllen:

$$f(-1) = 1,\ f(2) = 2,\ f'(1) = 0$$

$\hookrightarrow$ Das ist ein LGS in a, b, c:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax^2 + b$$

Setze -1 in f ein:

$$(-1)^3 + (-1)^2 a + (-1)b + c = 1 \qquad |+1$$

Setze 2 in f ein:

$$2^3 + 2^2 a + 2b + c = 2 \qquad |-8$$

Setze 1 in f' ein:

$$3 + 2a + b = 0 \qquad |-3$$

Wir bringen alle $()^3$ Terme auf die rechte Seite und erhalten folgendes LGS.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ \boxed{4} & 2 & 1 & -6 \\ \boxed{2} & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} Z_2 \to Z_2 - 4Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 - 2Z_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -3 & -14 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & -7 \end{array}\right) \quad Z_3 \to Z_3 - \frac{1}{2} Z_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{6} & -3 & -14 \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{1}{2}} & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} Z_2 \to \frac{1}{6} Z_2 \\ Z_3 \to -2 Z_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 1 & \boxed{-\frac{1}{2}} & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} Z_1 \to Z_1 - Z_3 \\ Z_2 \to Z_2 + \frac{1}{2} Z_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad Z_1 \to Z_1 + Z_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$a = -\frac{1}{3},\quad b = -\frac{7}{3},\quad c = 0$$

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{3}x$$

Interpolation ist super flexibel:

Gesucht ist eine Funktion $f(x) = a\,2^x + b \sin(x)$

mit $f(1) = 1,\ f(2) = 2$

$$\hookrightarrow \begin{cases} 2a + \sin(1)b = 1 \\ 4a + \sin(2)b = 2 \end{cases}$$

Bild:

Wie sieht f aus?

Parametrisierte LGS

Wir betrachten LGS $A_t x = b_t$ bei denen A und b von einem Parameter z.B. $t \in \mathbb{R}$ abhängen.

Beispiel (1)

$$\begin{aligned} (1+t)x_1 \qquad\qquad &= 3 \\ (2-t)x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das LGS lösbar?

A: Für $t \neq -1, 2$ lösbar:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{1+t} \\ \frac{2}{1+t} \end{pmatrix}$$

Für $t = -1$ ist $0 \cdot x_1 = 3$ nicht lösbar.

Für $t = 2$ ist $0 \cdot x_2 = 2$ —||—

$\hookrightarrow$ Man kann nicht immer durch Ausdrücke der Form $at + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ teilen

$\hookrightarrow$ wenn $t = -\frac{b}{a}$ ist, wäre das Division durch 0.

(2)

$$\begin{aligned} (1+t)x_1 &= 3 \\ (2-t)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Lösbar für $t \neq -1$. Für $t \neq -1, 2$ ist die Lösungsmenge $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{1+t} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Für $t = 2$ gibt es ∞-viele Lösungen

$$\text{Lösungsmenge} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{1+t} \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(3)

$$\begin{aligned} tx_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

In Matrixform: $\left(\begin{array}{cc|c} t & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Wende Gaussalgorithmus an, aber passe auf wann Division durch Parameterausdrücke erlaubt ist

Fall $t \neq 0$: $Z_2 \to Z_2 - \frac{1}{t} Z_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} t & \boxed{2} & 1 \\ 0 & \frac{t-2}{t} & \frac{t-1}{t} \end{array}\right)$$

Für $t = 2$ ist das LGS nicht lösbar: denn die zweite Glg. ist: $0 x_2 = \frac{1}{2}$.

Also nehme $t \neq 2$ an.

$$Z_1 \to Z_1 + \frac{-2t}{t-2} Z_2$$

NR: $\frac{t-1}{\cancel{t}} \cdot \frac{-2\cancel{t}}{t-2} + 1 = \frac{-t}{t-2}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} t & 0 & \frac{-t}{t-2} \\ 0 & \frac{t-2}{t} & \frac{t-1}{t} \end{array}\right)$$

$$Z_1 \to \frac{1}{t} Z_1$$

$$Z_2 \to \frac{t}{t-2} Z_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{t-2} \\ 0 & 1 & \frac{t-1}{t-2} \end{array}\right)$$

Lösungsmenge $\text{Lös}(A_t, b) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-1}{t-2} \\ \frac{t-1}{t-2} \end{pmatrix} \right\}$

Fall $t = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad Z_1 \to Z_1 - \frac{1}{2} Z_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad \text{Lös}_0(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$\rightsquigarrow$ Nur für $t = 2$ ist das LGS nicht lösbar.

Takeaway: Zeilen zu anderen Zeilen addieren

$$Z_i \to Z_i + \frac{a(t)}{b(t)} Z_j$$

ist nur eine Äquivalenzumformung, wenn b nicht von t abhängt. Falls b von t abhängt, braucht man eine Fallunterscheidung für die Nst. von b.

$$Z_i \to \frac{a(t)}{b(t)} Z_i$$

ist nur eine Äquivalenzumformung, wenn $a(t)$ & $b(t)$ konstant sind.

Faustregel: Zeilen nach unten tauschen, die t enthalten (manchmal weniger Fallunterscheidungen)

(4)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t & -t & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{t} & -t & 1 & 1 \end{array}\right) \quad Z_3 \to Z_3 - tZ_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-t} & 1 & 1-t \end{array}\right) \quad Z_3 \to Z_3 + tZ_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+t & 1 \end{array}\right)$$

Fall $t = -1$: Nicht lösbar. $0 \cdot x_3 = 1$

Fall $t \neq -1$ $\qquad Z_2 \to Z_2 + \frac{-1}{1+t} Z_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{t-1}{1+t} \\ 0 & 0 & 1+t & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{Lös}(A_t, b) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{t-1}{1+t} \\ \frac{1}{1+t} \end{pmatrix} \right\}$$

7.5.2024

Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl ist ein Ausdruck $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

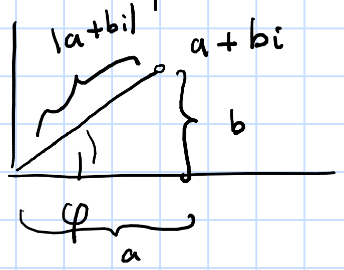
$\mathbb{C}$ ist ein Körper:

Addition: $(a+bi) + (c+di) := (a+c) + (b+d)i$

Multiplikation: $(a+bi) \cdot (c+di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$

$i = 0 + 1 \cdot i$ heißt die imaginäre Einheit

Bildlich:

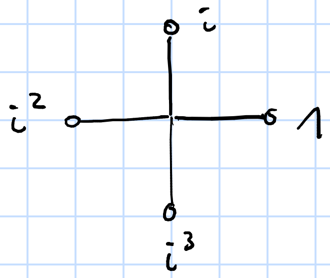


$|a+bi| = \sqrt{a+bi}$

$\left(\tan \varphi = \frac{b}{a} \right)$

Multiplikation von $z \in \mathbb{C}$ mit $a + bi$ ist

Streckung von z um $|a+bi|$ und Drehung von z um φ.



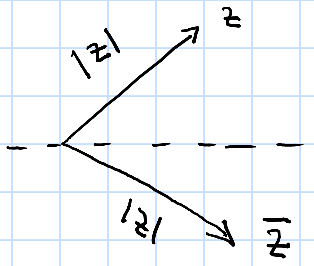
$\hookrightarrow i^4 = 1$

Algebraisch: $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

Was ist i^{43}?

Inverse Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Geometrisch:



$\bar{z} = a - ib$

Komplex Konjugiertes

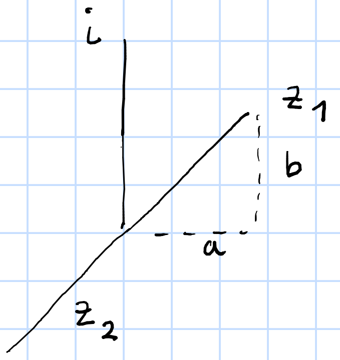
Es gilt $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
$= a^2 + b^2$

Wir wissen wie man durch reelle Zahlen teilt:

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

Komplexe Wurzeln Wir finden alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = i$



Wir sehen aus der Skizze

$$a = b \ \& \ a^2 + b^2 = |z|^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 1$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \qquad z_1^2 = \frac{1}{2}(1+i)(1+i)$$

$$z_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(1 + i) \qquad = \frac{1}{2} \cdot 2i = i$$

Wir könnten z_1 oder z_2 als Wurzel von z betrachten.

$\sqrt{i}$ (allgemeiner $\sqrt{a+bi}$) ist nicht eindeutig definiert.

nie schreiben.

Polynomringe

k Körper z.B $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

$k[x] = \{$ alle formalen Ausdrücke $a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_0$; $a_d, \dots, a_0 \}$

$= \{ (a_i) \in \prod_{i=1}^{\infty} k \mid$ Es gibt $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $i \geq N$ $a_i = 0 \}$

Warum sind Polynome formale Ausdrücke und nicht Funktionen?

Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Betrachte $f = x^2 + x \in \mathbb{F}_2[x]$

$f(0) = 0^2 + 0 = 0 + 0 = 0$

$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 0$

f ist nicht das Nullpolynom 0, obwohl alle seine Werte null sind.

Nullstellen $f \in k[x]$

$a \in k$ heißt Nullstelle von f, falls $f(a) = 0$ ist.

Dann existiert $g \in k[x]$, sodass

$$f = (x-a)g$$

Nützlicher Trick: $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$

$= b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3$, $a_1, a_2, a_3 \in k$

Berechne $b_0, \dots, b_4$ als Ausdrücke in den a_i.

Lösung: $b_0 = 1$

$b_1 = -a_1 - a_2 - a_3$

$b_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3$

$b_3 = -a_1 a_2 a_3$

Wie verallgemeinert man das auf mehr Faktoren?

Ü $f(x) = x^3 - 10x^2 + 23x - 14$

f hat 3 Nullstellen in $\mathbb{R}$, die ersten zwei sind $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

Wie lautet die dritte?

Lösung: $-a_1 - a_2 - a_3 = -10 \Leftrightarrow a_3 = 7$. //

Def. Der Grad eines Polynoms $0 \neq f = a_n x^n + a_{n-1} x^{d-1} + \dots \in k[x]$ ist der größte Index d mit $a_d \neq 0$. Schreibe $\deg f = d$.

Ein Grad d Polynom $(\neq 0)$ in hat höchstens d verschiedene Nullstellen. $\Rightarrow$ ANWENDUNG $\longrightarrow$

Sei k ein unendlicher Körper und $f, g \in k[x]$. Gilt $f(x_0) = g(x_0)$ für alle $x_0 \in k$, so folgt $f = g$.

Beweis: Betrachte $h = f - g$. h hat alle El. von k als Nullstellen. Also ist $h = 0$ □

Aufgabe $f = x^d + b_1 x^{d-1} + b_2 x^{d-2} + \dots + b_0 \in \mathbb{R}[x]$ hat d verschiedene positive Nullstellen (>0). Was gilt für die Vorzeichen von f?

Lösung: $b_1 < 0$, $b_2 > 0$, $b_3 < 0 \dots$

Warum: Seien $x_1, \dots, x_d$ die Nullstellen.

$b_1 = -x_1 - x_2 - \dots - x_d < 0$

$b_2 = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=i+1}^{d} x_i x_j = \sum_{i<j} x_i x_j > 0$

$b_3 = -\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=i+1}^{d} \sum_{k=j+1}^{d} x_i x_j x_k < 0$

$\vdots$ //

Vorzeichenregel von Descartes

$g(t) = x^m + g_{m-1} x^{m-1} + \dots \in \mathbb{R}[x]$

$Z(g)$ – Anzahl der Vorzeichenwechsel in $1, g_{m-1}, g_{m-2}, \dots, g_0$

$N_+(f)$ – Anzahl positive Nullstellen

Descartes: $N_+(f) \leq Z(f)$

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ kann als $f(x) = c(x - z_1) \cdot \ldots \cdot (x - z_d)$, $z_1, \dots, z_d \in \mathbb{C}$ geschrieben werden

Beispiel $f = x^2 - 2x + 4$

p-q-Formel: $z_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - 4} = 1 \pm \sqrt{-3}$

$= 1 \pm i\sqrt{3}$

$z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

Sei $f \in \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$

Beh.: Ist $z = a + ib$ eine Nullstelle von f, so ist auch $\bar{z} = a - ib$ eine Nullstelle von f.

Rechenregeln für Konjugation $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Beweis: $f = \sum_i f_i x^i$

$f(\bar{z}) = \sum_i f_i (\bar{z})^i = \sum_i f_i \overline{(z^i)} = \sum_i \overline{f_i z^i}$

$= \overline{\sum_i f_i z^i} = \overline{\sum_i f_i z^i} = \overline{f(z)} = \bar{0} = 0$ □

Übung: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6 \in \mathbb{C}[x]$ hat die Nullstelle $\sqrt{2}i$. Wie lauten die anderen beiden Nullstellen?