19.4.24

Mengentheorie

Eine Menge ist eine <u>ungeordnete</u> Ansammlung von Elementen, wobei jedes Element nur einmal vorkommen kann.

(1) Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die selben Elemente enthalten.

(2) Eine Menge A kann auch andere Mengen enthalten, aber nie sich selbst.

Sind folgende Mengen gleich?

(1) $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$

(2) $\{4,4,1\} = \{4,1\}$

(3) $\{\{1,2,3\},4,1\} \neq \{1,2,3,4,1\}$

(4) $\{\{\{\},\{\}\},\{\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Teilmengen & set-builder notation

$A \subseteq B$: Jedes Element x von A ist Element von B.

$A \subsetneq B$: Es gilt $A \subset B$ und $A \neq B$
„Echte Teilmenge"

Teilmengen definieren: Sei A Menge

$$B = \{x \in A \mid \text{Aussage die für } x \text{ gelten muss, damit es in } B \text{ liegt}\}$$

Bsp

$\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist durch 2 teilbar}\}$
$= \{2,4,6,8,\dots\}$

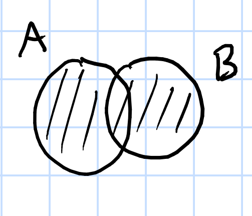
$\{x \in A \mid x \notin A\} = \emptyset$

$\{x \in \mathbb{Q} \mid \text{Es gibt } y \in \mathbb{Q}\text{, sodass } xy = 1\} =$
$\{\text{alle Zahlen in } \mathbb{Q}\text{, außer } 0\}$

$\{x \in \mathbb{Z} \mid \text{Es gibt } y \in \mathbb{Z}\text{, sodass } xy = 1\} = \{1,-1\}$

Vereinigungen, Durchschnitt etc.

$A \cup B = \{\text{Elemente, die in } A \text{ oder } B \text{ enthalten sind}\}$



$A \cap B = \{\text{Elemente, die } A \text{ und in } B \text{ enthalten sind}\}$

$A \setminus B = \{\text{Elemente, die in } A \text{ und nicht in } B \text{ enthalten sind}\}$

Sei A Teilmenge von X.

$A^c = \{\text{Elemente von } X\text{, die nicht in } A \text{ enthalten sind}\}$
$= \{x \in X \mid x \notin A\}$

! Diese Def. hängt von X ab!

Übung $A = \{1,2,3\}$, $B = \{5,2\}$, $C = \{1\}$

$(A \cup B) \cap C = \{1\}$

$A \cup (B \cap C) = A \cup \emptyset = A$

$(A \setminus B) \cup C = \{1,3\}$

$A \setminus (B \cup C) = A \setminus \{1,2,5\} = \{1\}$

De Morgan'sche Regel

$A, B \subset X$ Komplement bzgl. X

(i) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Beweis: $(A \cap B)^c = \{x \in X \mid x \notin A \text{ und } x \notin B\}^c$

$= \{x \in X \mid \text{Das folgendende gilt nicht: } x \notin A \text{ und } x \notin B\}$

$= \{x \in X \mid x \notin A \text{ oder } x \notin B\}$

$= \{x \in X \mid x \notin A\} \cup \{x \in X \mid x \notin B\}$

$= A^c \cup B^c$

Der andere Beweis geht ähnlich. □

(iii) $(A^c)^c = A$

Beweis: $(A^c)^c = \{x \in X \mid x \notin A^c\}^c = \{x \in X \mid \neg(x \in A)\}$

$= \{x \in X \mid x \in A\} = A$ □

$= \{x \in X \mid \text{Es gilt nicht } x \notin A\}$

Potenzmenge

$\mathcal{P}(A) = \{\text{Menge aller Teilmenge von } A\}$

Bsp. $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Gilt $1 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$? Nein, denn 1 ist keine Teilmenge von $\mathbb{N}$ (aber $\{1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$)

Schreibe systematisch $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ hin.

Wieviele Elemente hat $\mathcal{P}(A)$ für eine endliche Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$
↳ A hat 2^n Elemente.

Tupel & kartesische Produkte

Ein Tupel ist eine geordnete Liste von Elementen möglicherweise mit Wiederholungen

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Bsp $(1,2) \neq (2,1)$

$(1,1,2) \neq (1,2)$

Sind A, B Mengen, definieren wir das kartesische Produkt $A \times B$ als die Menge

$$A \times B = \{\text{Tupel } (a,b) \text{ mit } a \in A, b \in B\}$$

Bsp $\{1, \{\}\} \times \{1,2\}$
$= \{(1,1), (1,2), (\{\},1), (\{\},2)\}$

Funktionen

Seien A, B Menge

Eine Funktion/Abbildung f ist ein Tupel (Γ, A, B), wobei Γ eine Teilmenge von $A \times B$ ist, sodass gilt:

Für jedes $a \in A$ gibt es genau ein Tupel $(a,b) \in \Gamma$.

Schreibweise: $f: \underset{\text{Definitionsmenge}}{A} \longrightarrow \underset{\text{Zielmenge}}{B}$, Γ heißt der Graph von X

$(a,b) \in \Gamma$ wird als $f(a) = b$ oder als $f: a \mapsto b$ geschrieben.

Check Sind dies Funktionen?

$A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$

$f_1 = (\{(1,3)\}, A, B)$

$f_2 = (\{(1,3),(2,4),(1,4)\}, A, B)$

$f_3 = (\{(1,1),(2,2)\}, A, B)$, $f_4 = (\{(1,3),(2,3)\}, A, B)$

Bsp.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n$ $\qquad$ $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n$

verschieden: $f \neq g$!

26.4.2024

Kommentar zu Urbildern:

$f: X \longrightarrow Y$ sei eine Funktion
und $A \subseteq Y$ eine Teilmenge.

$$f^{-1}(A) = \{ x \in X \mid f(x) \in A \}$$

f^{-1} steht nicht für die Umkehrfunktion.
Eine Umkehrfunktion existiert nur, wenn f bijektiv ist,
$f^{-1}(A)$ ist immer definiert.

Spezialfall: $p \in Y$
Die Menge $f^{-1}(\{p\})$ heißt eine Faser von f.
Oft schreibt man aus Faulheit $f^{-1}(p)$
, obwohl $f^{-1}(\{p\})$ meint (Siehe Übungsblatt).

f injektiv: Alle Fasern von f haben höchstens ein Element.

f surjektiv: Alle Fasern sind nicht leer.

---

siehe auch „natural number game"

Beispiele für Induktion (IA) Induktionsanfang (IS) Induktionsschritt (IV) Induktionsvoraussetzung

Z: Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Beweis: (IA) $n = 1$: $1^2 = \frac{1}{3}1^3 + \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{6}$ ✓

(IB) Gelte $(*)$ für ein n.

(IS) Zeige dasselbe für $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2$$
$$= \left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) + n^2 + 2n + 1$$

$$\frac{1}{3}(n+1)^3 + \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}n$$
$$= \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1) + \frac{1}{6}n$$
$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + n^2 + 2n + 1 \ ✓ \ \boxdot$$

Z: Die Menge der Bijektionen zwischen zwei endlichen Mengen X & Y der selben Kardinalität n ist $n!$

Beweis: Induktion über $n \in \{0, 1, \dots\}$

(IA) $n=0$: X & Y sind leer. Es gibt genau eine Funktion $f: \emptyset \longrightarrow \emptyset$
↳ Der Graph ist die leere Menge

(IB) Die Aussage gelte für Mengen der Größe $n-1$.

(IS) Sei $x \in X$ beliebig. Schreibe $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$

$$\underbrace{\{f: X \to Y \mid f \text{ bijektiv}\}}_{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{\{f: X \to Y \mid f \text{ bijektiv}, f(x) = y_i\}}_{A_i}$$

Die obige Vereinigung erfüllt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.
↳ $|A| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$

Ist $f \in A_i$ so ist $f|_{X \setminus \{x\}}: X \setminus \{x\} \longrightarrow Y \setminus \{y_i\}$ eine Bijektion.

$$|A_i| = |\{f: X \setminus \{x\} \to Y \setminus \{y_i\} \mid f \text{ bijektiv}\}|$$
$$= (n-1)!$$
(Induktionsbehauptung)

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (n-1)! = n \cdot (n-1)! = n! \ \boxdot$$

Z: Hat A n Elemente, so gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Beweis: Induktion über n.

(IA) $n = 0$: $A = \emptyset$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\} \rightsquigarrow 2^0$ Elemente

(IB) Gelte die Aussage für $n-1$.

(IS) Sei $a \in A$. Jede Teilmenge von A enthält a oder enthält es nicht.

$$\mathcal{P}(A) = \underbrace{\{B \in \mathcal{P}(A) \mid a \in B\}}_{P} \cup \underbrace{\{B \in \mathcal{P}(A) \mid a \notin B\}}_{Q}$$

Bemerke $P \cap Q = \emptyset$. Außerdem gilt $Q = \mathcal{P}(A \setminus \{a\})$.

Bijektion $f: Q \longrightarrow P$
$B \mapsto B \cup \{a\}$

(Warum ist das bijektiv)

$$|\mathcal{P}(A)| = |P| + |Q| = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n. \ \boxdot$$

Z: Sind X, Y endliche Mengen, so gilt
$$|X \times Y| = |X||Y|$$

Beweis: Wir nutzen Induktion über $|X| = n$

(IA) $n=0$: $X = \emptyset \Rightarrow X \times Y = \emptyset \rightsquigarrow$ hat also $0 \cdot |Y|$ viele Elemente

(IB) Gelte die Aussage für $n-1$.

(IS) Wähle $x \in X$.

$$X \times Y = \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in Y\} \cup (X \setminus \{x\}) \times Y$$

diese Menge sind disjunkt

diese Menge hat genauso viele Elemente wie Y

$$|X \times Y| = |Y| + |(X \setminus \{x\}) \times Y|$$
$$= |Y| + (|X| - 1) \cdot |Y| = |X| \cdot |Y| \ \boxdot$$

Fibonacci-Zahlen

Induktive Definition: $F_0 = 0, F_1 = 1$ (IA)
Seien alle F_k mit $k < n$ definiert (IB)
$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (IS)

$F_2 = 1, \ F_3 = 2, \ F_4 = 3, \dots$

Z: $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

Beweis: Induktion über n.

(IA) $n=0$: $F_1 = 2 - 1 = F_3 - 1$ ✓

(IB) Gelte die Aussage für ein n.

(IS)
$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) + F_{n+1}$$
$$= F_{n+2} - 1 + F_{n+1}$$
$$= F_{n+3} - 1 \ \boxdot$$

Was haben Fibonacci-Zahlen mit linearer Algebra zu tun?

Bildungsgesetz in Matrix Form

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ mal}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}}$$

↳ Wie berechnet man Potenzen von Matrizen effizient?
Antwort am Ende des Semesters

Lösung von
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

red. Zeilenstufenform:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{2} & 3 & 3 & 4 \\ \boxed{3} & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot(-2) \ \cdot(-3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot(-1)$$

Zeilenstufenform
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \cdot(-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x_1 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{matrix}$$

$$\text{Lös}\left(A, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 3x_3 + 4x_4 \\ -3x_3 - 4x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \ x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 2 & 1 \\ \boxed{2} & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot \frac{1}{2} \\ \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot(-\tfrac{1}{2})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot(-2) \ \cdot \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \leftarrow \text{reduzierte Zeilenstufenform}$$