19.4.24

Mengentheorie

Eine Menge ist eine <u>ungeordnete</u> Ansammlung von Elementen, wobei jedes Element nur einmal vorkommen kann.

(1) Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die selben Elemente enthalten.

(2) Eine Menge A kann auch andere Mengen enthalten, aber nie sich selbst.

<u>Sind folgende Mengen gleich?</u>

(1) $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$

(2) $\{4,4,1\} = \{4,1\}$

(3) $\{\{1,2,3\},4,1\} \neq \{1,2,3,4,1\}$

(4) $\{\{\{\},\{\}\},\{\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Teilmengen & set-builder notation

$A \subseteq B$: Jedes Element x von A ist Element von B.

$A \subsetneq B$: Es gilt $A \subset B$ und $A \neq B$
„Echte Teilmenge"

Teilmengen definieren: Sei A Menge

$B = \{x \in A \mid$ Aussage die für x gelten muss, damit es in B liegt $\}$

<u>Bsp.</u> $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ ist durch 2 teilbar $\}$
$= \{2,4,6,8,\dots\}$

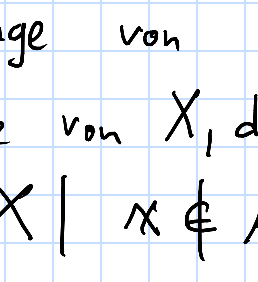
$\{x \in A \mid x \notin A\} = \emptyset$

$\{x \in \mathbb{Q} \mid$ Es gibt $y \in \mathbb{Q}$, sodass $xy = 1\} =$
$\{$ alle Zahlen in $\mathbb{Q}$, außer $0 \}$

$\{x \in \mathbb{Z} \mid$ Es gibt $y \in \mathbb{Z}$, sodass $xy = 1\} = \{1, -1\}$

Vereinigungen, Durchschnitt etc.

$A \cup B = \{$ Elemente, die in A oder B enthalten sind $\}$



$A \cap B = \{$ Elemente, die A und in B enthalten sind $\}$

$A \setminus B = \{$ Elemente, die in A und nicht in B enthalten sind $\}$

Sei A Teilmenge von X.

$A^c = \{$ Elemente von X, die nicht in A enthalten sind $\}$
$= \{x \in X \mid x \notin A\}$

! Diese Def. hängt von X ab!

<u>Übung</u> $A = \{1,2,3\}$, $B = \{5,2\}$, $C = \{1\}$

$(A \cup B) \cap C = \{1\}$

$A \cup (B \cap C) = A \cup \emptyset = A$

$(A \setminus B) \cup C = \{1,3\}$

$A \setminus (B \cup C) = A \setminus \{1,2,5\} = \{1\}$

De Morgan'sche Regel

$A, B \subset X$ Komplement bzgl. X

(i) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

<u>Beweis:</u> $(A \cap B)^c = \{x \in X \mid x \notin A$ und $x \notin B\}^c$
$= \{x \in X \mid$ Das folgendende gilt nicht: $x \notin A$ und $x \notin B\}$
$= \{x \in X \mid x \notin A$ oder $x \notin B\}$
$= \{x \in X \mid x \notin A\} \cup \{x \in X \mid x \notin B\}$
$= A^c \cup B^c$

Der andere Beweis geht ähnlich. □

(iii) $(A^c)^c = A$

<u>Beweis:</u> $(A^c)^c = \{x \in X \mid x \notin A^c\}^c = \{x \in X \mid \neg(x \in A)\}$
$= \{x \in X \mid x \in A\} = A$ □
$= \{x \in X \mid$ Es gilt nicht $x \notin A\}$

Potenzmenge

$\mathcal{P}(A) = \{$ Menge aller Teilmenge von $A \}$

<u>Bsp.</u> $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Gilt $1 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$? Nein, denn 1 ist keine Teilmenge von $\mathbb{N}$ (aber $\{1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$)

Schreibe systematisch $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ hin.

Wieviele Elemente hat $\mathcal{P}(A)$ für eine endliche Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$
↪ A hat 2^n Elemente.

Tupel & kartesische Produkte

Ein Tupel ist eine geordnete Liste von Elementen möglicherweise mit Wiederholungen
$(a_1, a_2, \dots, a_n)$

<u>Bsp</u> $(1,2) \neq (2,1)$
$(1,1,2) \neq (1,2)$

Sind A, B Mengen, definieren wir das kartesische Produkt $A \times B$ als die Menge
$A \times B = \{$ Tupel (a,b) mit $a \in A, b \in B\}$

<u>Bsp</u> $\{1, \{\}\} \times \{1,2\}$
$= \{(1,1), (1,2), (\{\},1), (\{\},2)\}$

Funktionen

Seien A, B Menge

Eine Funktion/Abbildung f ist ein Tupel (Γ, A, B), wobei Γ eine Teilmenge von $A \times B$ ist, sodass gilt:

Für jedes $a \in A$ gibt es genau ein Tupel $(a,b) \in \Gamma$.

<u>Schreibweise</u>: $f : \underbrace{A}_{\text{Definitionsmenge}} \longrightarrow \underbrace{B}_{\text{Zielmenge}}$, Γ heißt der Graph von X

$(a,b) \in \Gamma$ wird als $f(a) = b$ oder als $f : a \mapsto b$ geschrieben.

<u>Check</u> Sind dies Funktionen?

$A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$

$f_1 = (\{(1,3)\}, A, B)$ ✗

$f_2 = (\{(1,3),(2,4),(1,4)\}, A, B)$ ✗

$f_3 = (\{(1,1),(2,2)\}, A, B)$ ✗, $f_4 = (\{(1,3),(2,3)\}, A, B)$ ✓

<u>Bsp.</u>

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n$ $\qquad$ $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n$

verschieden: $f \neq g$!

26.4.2024

Kommentar zu Urbildern:

$f: X \longrightarrow Y$ sei eine Funktion und $A \subseteq Y$ eine Teilmenge.

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$

f^{-1} steht nicht für die Umkehrfunktion. Eine Umkehrfunktion existiert nur, wenn f bijektiv ist, $f^{-1}(A)$ ist immer definiert.

Spezialfall: $p \in Y$

Die Menge $f^{-1}(\{p\})$ heißt eine Faser von f.

Oft schreibt man aus Faulheit $f^{-1}(p)$, obwohl $f^{-1}(\{p\})$ meint (Siehe Übungsblatt).

f injektiv: Alle Fasern von f haben höchstens ein Element.

f surjektiv: Alle Fasern sind nicht leer.

siehe auch „natural number game"

<u>Beispiele für Induktion</u> (IA) Induktionsanfang (IS) Induktionsschritt (IV) Induktionsvoraussetzung

<u>Z</u>: Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

<u>Beweis</u>: (IA) $n=1$: $1^2 = \frac{1}{3}1^3 + \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{6}$ ✓

(IB) Gelte $(*)$ für ein n.

(IS) Zeige dasselbe für $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2$$
$$= \left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) + n^2 + 2n + 1$$

$$\frac{1}{3}(n+1)^3 + \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}n$$
$$= \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1) + \frac{1}{6}n$$
$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + n^2 + 2n + 1 \quad ✓ \quad \boxdot$$

<u>Z</u>: Die Menge der Bijektionen zwischen zwei endlichen Mengen X & Y der selben Kardinalität n ist $n!$

<u>Beweis</u>: Induktion über $n \in \{0, 1, \ldots\}$

(IA) $n=0$: X & Y sind leer. Es gibt genau eine Funktion $f: \emptyset \longrightarrow \emptyset$

↳ Der Graph ist die leere Menge

(IB) Die Aussage gelte für Mengen der Größe $n-1$.

(IS) Sei $x \in X$ beliebig. Schreibe $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$

$$\underbrace{\{f: X \to Y \mid f \text{ bijektiv}\}}_{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{\{f: X \to Y \mid f \text{ bijektiv}, f(x) = y_i\}}_{A_i}$$

Die obige Vereinigung erfüllt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

↳ $|A| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$

Ist $f \in A_i$ so ist $f|_{X \setminus \{x\}}: X \setminus \{x\} \longrightarrow Y \setminus \{y_i\}$ eine Bijektion. $|A_i| = |\{f: X \setminus \{x\} \to Y \setminus \{y_i\} \mid f \text{ bijektiv}\}|$

$$= (n-1)!$$
(Induktionsbehauptung)

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (n-1)! = n \cdot (n-1)! = n! \quad \boxdot$$

<u>Z</u>: Hat A n Elemente, so gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

<u>Beweis</u>: Induktion über n.

(IA) $n=0$: $A = \emptyset$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\} \rightsquigarrow 2^0$ Elemente

(IB) Gelte die Aussage für $n-1$.

(IS) Sei $a \in A$. Jede Teilmenge von A enthält a oder enthält es nicht.

$$\mathcal{P}(A) = \underbrace{\{B \in \mathcal{P}(A) \mid a \in B\}}_{P} \cup \underbrace{\{B \in \mathcal{P}(A) \mid a \notin B\}}_{Q}$$

Bemerke $P \cap Q = \emptyset$. Außerdem gilt $Q = \mathcal{P}(A \setminus \{a\})$.

Bijektion $f: Q \longrightarrow P$
$$B \mapsto B \cup \{a\}$$

(Warum ist das bijektiv)

$$|\mathcal{P}(A)| = |P| + |Q| = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n. \quad \boxdot$$

<u>Z</u>: Sind X, Y endliche Mengen, so gilt
$$|X \times Y| = |X||Y|$$

<u>Beweis</u>: Wir nutzen Induktion über $|X| = n$

(IA) $n=0$: $X = \emptyset \Rightarrow X \times Y = \emptyset \rightsquigarrow$ hat also $0 \cdot |Y|$ viele Elemente

(IB) Gelte die Aussage für $n-1$.

(IS) Wähle $x \in X$.

$$X \times Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in Y\} \cup (X \setminus \{x\}) \times Y$$

diese Menge sind disjunkt

diese Menge hat genauso viele Elemente wie Y

$$|X \times Y| = |Y| + |(X \setminus \{x\}) \times Y|$$
$$= |Y| + (|X| - 1) \cdot |Y| = |X| \cdot |Y| \quad \boxdot$$

<u>Fibonacci-Zahlen</u>

Induktive Definition: $F_0 = 0, F_1 = 1$ (IA)

Seien alle F_k mit $k < n$ definiert (IB)

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (IS)

$$F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \ldots$$

<u>Z</u>: $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

<u>Beweis</u>: Induktion über n.

(IA) $n=0$: $F_1 = 2 - 1 = F_3 - 1$ ✓

(IB) Gelte die Aussage für ein n.

(IS) $$\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) + F_{n+1}$$
$$= F_{n+2} - 1 + F_{n+1}$$
$$= F_{n+3} - 1 \quad \boxdot$$

Was haben Fibonacci-Zahlen mit linearer Algebra zu tun?

Bildungsgesetz in Matrix Form

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ mal}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}}$$

↳ Wie berechnet man Potenzen von Matrizen effizient?

Antwort am Ende des Semesters

Lösung von
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

red. Zeilenstufenform:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{2} & 3 & 3 & 4 \\ \boxed{3} & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot(-2) \quad \cdot(-3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot(-1)$$

Zeilenstufenform
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \cdot(-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x_1 - 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{matrix}$$

$$\text{Lös}\left(A, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 3x_3 + 4x_4 \\ -3x_3 - 4x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 2 & 1 \\ \boxed{2} & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot \frac{1}{2} \\ \\ \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot(-2) \quad \cdot\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \leftarrow \text{reduzierte Zeilenstufenform}$$

2.5.24

LGS anhand von Beispielen $\rightsquigarrow$ Interpolation:

Polynome sind für uns Funktionen der Form

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$$

Wir wollen hier ein Polynom der Form

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

finden, die folgendes erfüllen:

$$f(-1) = 1, \; f(2) = 2, \; f'(1) = 0$$

$\hookrightarrow$ Das ist ein LGS in a, b, c:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax^2 + b$$

Setze -1 in f ein:

$$(-1)^3 + (-1)^2 a + (-1)b + c = 1 \quad |+1$$

Setze 2 in f ein:

$$2^3 + 2^2 a + 2b + c = 2 \quad |-8$$

Setze 1 in f' ein:

$$3 + 2a + b = 0 \quad |-3$$

Wir bringen alle ()^3 Terme auf die rechte Seite und erhalten folgendes LGS.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ \boxed{4} & 2 & 1 & -6 \\ \boxed{2} & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} z_2 \to z_2 - 4z_1 \\ z_3 \to z_3 - 2z_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -3 & -14 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & -7 \end{array}\right) \quad z_3 \to z_3 - \tfrac{1}{2} z_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{6} & -3 & -14 \\ 0 & 0 & \boxed{-\tfrac{1}{2}} & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} z_2 \to \tfrac{1}{6} z_2 \\ z_3 \to -2 z_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 1 & \boxed{-\tfrac{1}{2}} & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} z_1 \to z_1 - z_3 \\ z_2 \to z_2 + \tfrac{1}{2} z_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad z_1 \to z_1 + z_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$a = -\tfrac{1}{3}, \quad b = -\tfrac{7}{3}, \quad c = 0$$

$$f(x) = x^3 - \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{7}{3}x$$

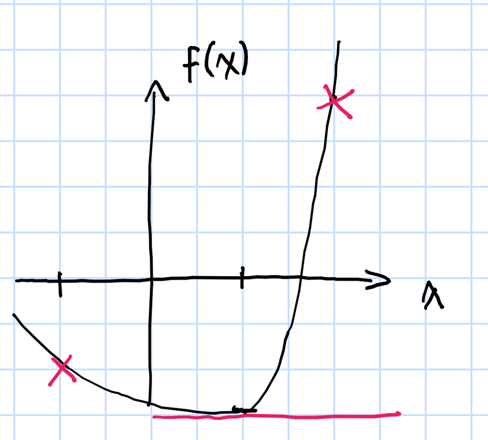
Interpolation ist super flexibel:

Gesucht ist eine Funktion $f(x) = a\,2^x + b\sin(x)$

mit $f(1) = 1, \; f(2) = 2$

$$\hookrightarrow \begin{cases} 2a + \sin(1)b = 1 \\ 4a + \sin(2)b = 2 \end{cases}$$

Bild:



Wie sieht f aus?

Parametrisierte LGS

Wir betrachten LGS $A_t x = b_t$ bei denen A und b von einem Parameter z.B. $t \in \mathbb{R}$ abhängen.

Beispiel (1)

$$\begin{array}{rcl} (1+t)x_1 & & = 3 \\ & (2-t)x_2 & = 2 \end{array}$$

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das LGS lösbar?

A: Für $t \neq -1, 2$ lösbar:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{1+t} \\ \frac{2}{1+t} \end{pmatrix}$$

Für $t = -1$ ist $0 \cdot x_1 = 3$ nicht lösbar.

Für $t = 2$ ist $0 \cdot x_2 = 2$ —||—

$\hookrightarrow$ Man kann nicht immer durch Austrücke der Form $at + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ teilen

$\hookrightarrow$ wenn $t = -\frac{b}{a}$ ist, wäre das Division durch 0.

(2)

$$(1+t)x_1 = 3$$
$$(2-t)x_2 = 0$$

Lösbar für $t \neq -1$. Für $t \neq -1, 2$ ist die Lösungsmenge $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{1+t} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Für $t = 2$ gibt es ∞-viele Lösungen

$$\text{Lösungsmenge} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{1+t} \\ x_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(3)

$$tx_1 + 2x_2 = 1$$
$$x_1 + x_2 = 1$$

In Matrixform:

$$\left(\begin{array}{cc|c} t & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Wende Gaussalgorithmus an, aber passe auf wann Division durch Parameterausdrücke erlaubt ist

Fall $t \neq 0$: $z_2 \to z_2 - \frac{1}{t} z_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} t & \boxed{2} & 1 \\ 0 & \frac{t-2}{t} & \frac{t-1}{t} \end{array}\right)$$

Für $t = 2$ ist das LGS nicht lösbar:

denn die zweite Glg. ist: $0x_2 = \frac{1}{2}$.

Also nehme $t \neq 2$ an.

$$z_1 \to z_1 + \frac{-2t}{t-2} z_2$$

NR: $\frac{t-1}{\cancel{t}} \cdot \frac{-2\cancel{t}}{t-2} + 1 = \frac{-t}{t-2}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} t & 0 & \frac{-t}{t-2} \\ 0 & \frac{t-2}{t} & \frac{t-1}{t} \end{array}\right)$$

$$z_1 \to \tfrac{1}{t} z_1$$
$$z_2 \to \tfrac{t}{t-2} z_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{t-2} \\ 0 & 1 & \frac{t-1}{t-2} \end{array}\right)$$

Lösungsmenge $\text{Lös}(A_t, b) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-1}{t-2} \\ \frac{t-1}{t-2} \end{pmatrix} \right\}$

Fall $t = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad z_1 \to z_1 - \tfrac{1}{2} z_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \text{Lös}_0(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$\rightsquigarrow$ Nur für $t = 2$ ist das LGS nicht lösbar.

Takeaway: Zeilen zu anderen Zeilen addieren

$$z_i \to z_i + \frac{a(t)}{b(t)} z_j$$

ist nur eine Äquivalenzumformung, wenn b nicht von t abhängt. Falls b von t abhängt, braucht man eine Fallunterscheidung für die Nst. von b.

$$z_i \to \frac{a(t)}{b(t)} z_i$$

ist nur eine Äquivalenzumformung, wenn $a(t)$ & $b(t)$ konstant sind.

Faustregel: Zeilen nach unten tauschen, die t enthalten (manchmal weniger Fallunterscheidungen)

(4)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t & -t & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{t} & -t & 1 & 1 \end{array}\right) \quad z_3 \to z_3 - tz_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-t} & 1 & 1-t \end{array}\right) \quad z_3 \to z_3 + tz_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+t & 1 \end{array}\right)$$

Fall $t = -1$: Nicht lösbar. $0 \cdot x_3 = 1$

Fall $t \neq -1$

$$z_2 \to z_2 + \frac{-1}{1+t} z_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{t-1}{1+t} \\ 0 & 0 & 1+t & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{Lös}(A_t, b) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{t-1}{1+t} \\ \frac{1}{1+t} \end{pmatrix} \right\}$$