UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung Multilineare Algebra

Sommersemester 2024

Blatt 1

Abgabetermin: Montag, 29.04.2024, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (4+4=8 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ und sei $\mathbb{R}[x]_{\leq n} := \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome in $\mathbb{R}[x]$ vom Grad $\leq n$ mit Standardbasis $B_n := (x^0, x^1, \ldots, x^n)$. Die Abbildung

$$ev_{a,n} : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \to \mathbb{R}, p \mapsto p(a)$$

heißt *Auswertung in* $a \in \mathbb{R}$.

(a) Sei $B_n^\vee$ die zu B_n duale Basis. Schreiben Sie $ev_{a,4}$ für $a \in \{-3, 0, 3\}$ als Linearkombination von Basisvektoren aus $B_4^\vee$.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Wir definieren die folgende lineare Abbildung

$$\int_a^b : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}, p \mapsto \int_a^b p\, dx.$$

Außerdem setzen wir $h := \frac{b-a}{2}$. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b, ev_{a,2}, ev_{a+h,2}, ev_{b,2} \in (\mathbb{R}[x]_{\leq 2})^\vee$$

linear abhängig sind und bestimmen Sie eine nichttriviale Darstellung der Null für diese Elemente.

Aufgabe 2 (4+1=5 Punkte)

Seien V, W endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$.

(a) Zeigen Sie, dass f^t genau dann injektiv ist, wenn f surjektiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass f^t genau dann surjektiv ist, wenn f injektiv ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f, g \in V^\vee$ mit $Ker(f) = Ker(g)$. Zeigen Sie, dass $f = \lambda g$ für ein $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt.

Aufgabe 4 (2+2+5=9 Punkte)

Sei $V := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen reellen Funktionen auf $[0,1]$ (vergewissern Sie sich, dass V unendlich dimensional ist). Für $f \in V$ definieren wir

$$\int_0^1 f : V \to \mathbb{R},$$
$$g \mapsto \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dies induziert eine Abbildung

$$\int_0^1 : V \to V^\vee,$$
$$f \mapsto \int_0^1 f.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\int_0^1$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\int_0^1$ injektiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\int_0^1$ nicht surjektiv ist.

(*Hinweis: Folgendes Vorgehen könnte bei Teil (c) hilfreich sein: Wählen Sie* $p \in (0, 1)$ *und betrachten Sie die Abbildung* $\delta_p : V \to \mathbb{R}, f \mapsto f(p)$*. Zeigen Sie, dass* δ_p *nicht im Bild von* $\int_0^1$ *liegen kann.*)

Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt online über URM. Das Repetitorium findet zweiwöchentlichs freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N16 statt.