UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung Multilineare Algebra

Sommersemester 2024

Blatt 2 Abgabetermin: Montag, 13.05.2024, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (2+4=6 Punkte)

(a) Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Seien $U_1, U_2 \subset V$ und $W_1, W_2 \subset V^\vee$ Untervektorräume. Beweisen Sie die folgende Relation für Annulatoren: $(U_1 + U_2)^\circ = U_1^\circ \cap U_2^\circ$.

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}^5$ durch $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ gegeben. Bestimmen Sie eine Basis von U°.

Aufgabe 2 (2+2= 4 Punkte)

(a) Welches $f \in (\mathbb{R}^3)^\vee$ erfüllt $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2, f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 5, f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2$?

(b) Gibt es ein $f \in (\mathbb{R}^2)^\vee$ welches

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5, f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$$

erfüllt?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis B und $b : V \times V \to \mathbb{K}$ eine nicht ausgeartete Bilinearform. Zeigen Sie für die Abbildung

$$b'' : V \to V^\vee, w \mapsto b_w$$

aus der Vorlesung folgende Aussage: ${}_BM_{B^\vee}(b'') = M_B(b)$, wobei ${}_BM_{B^\vee}(b'')$ die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung b'' bezüglich der Basen B und $B^\vee$ und $M_B(b)$ die Gramsche Matrix von b bezüglich B bezeichne.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $U \subset V$ ein Unterraum und $\vartheta : V \to V/U$ die Restklassenabbildung. Zeigen Sie, dass das Paar $(V/U, \vartheta)$ folgender universeller Eigenschaft genügt:

Für alle $\mathbb{K}$-Vektorräume W und linearen Abbildungen $f' : V \to W$ mit $f' \mid_U = 0$ existiert genau ein lineares $f : V/U \to W$ mit $f' = f \circ \vartheta$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$ bilinear ist. Wie sieht der Graph G von f in $\mathbb{R}^3$ aus? Zeigen Sie, dass die Fläche $G \subset \mathbb{R}^3$ eine Vereinigung von Geraden (d.h. affinen 1-dimensionalen Unterräumen von $\mathbb{R}^3$) ist.

Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt online über URM. Das Repetitorium findet zweiwöchentlichs freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N16 statt.