

Übungen zur Vorlesung Algebra  
Sommersemester 2025

Blatt 10

Abgabetermin: Mittwoch, 02.07.2025, 10:00 Uhr

---

**Aufgabe 1**

( 3 + 3 + 3 = 9 Punkte)

Es sei  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{7})$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7})$ .
  - (b) Zeigen Sie, dass  $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  und bestimmen Sie  $[K : \mathbb{Q}]$ .
  - (c) Bestimmen Sie die Galoisgruppe  $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$  von  $\mathbb{Q} \subset K$ .
- 

**Aufgabe 2**

(8 Punkte)

Bestimmen Sie den Zerfällungskörper  $K$  von  $X^4 - X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$  und die Galoisgruppe  $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ .

---

**Aufgabe 3**

(8 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie: Die Körpererweiterung  $\mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$  über  $\mathbb{Q}$  ist normal.

---

**Aufgabe 4**

(8 Punkte)

Sei  $K$  ein Körper der Charakteristik  $p > 0$  und sei  $L|K$  eine endliche Körpererweiterung mit  $p \nmid [L : K]$ . Zeigen Sie, dass  $L|K$  separabel ist.

---