UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung Algebra

Sommersemester 2025

Blatt 11

Abgabetermin: Mittwoch, 09.07.2025, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Beweisen Sie: Jeder algebraisch abgeschlossene Körper hat ∞-viele Elemente.

Aufgabe 2 ($3 + 3 + 3 + 2^* = 9$ Punkte)

Konstruieren Sie einen Körper mit 9 Elementen an Hand der folgenden Anleitung:

(a) Zeigen Sie, dass $f := X^2 + 2X + 2 \in \mathbb{Z}_3[X]$ irreduzibel ist.

(b) Geben Sie alle Elemente von $\mathbb{Z}_3[X]/\langle f \rangle$ an. Um wie viele Elemente handelt es sich?

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Verknüpfungstabellen, dass $(\mathbb{Z}_3[X]/\langle f \rangle, +, \cdot)$ ein Körper ist.

(d*) Sei $\mathbb{F}_9 := \mathbb{Z}_3[X]/\langle f \rangle$ der gerade von Ihnen konstruierte Körper. Berechnen Sie die Nullstellen von $X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_9[X]$ in $\mathbb{F}_9$. Geben Sie eine Zerlegung in irreduzible Polynome an.

Aufgabe 3 ($1 + 3 + 3 = 7$ Punkte)

Es sei $\mathbb{Q} \subset K = \mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{7})$(siehe Aufgabe 1, Blatt 10).

(a) Begründen Sie: $\mathbb{Q} \subset K$ is galoisch.

(b) Bestimmen Sie den Untergruppenverband von $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$.

(c) Bestimmen Sie den Zwischenkörperverband von $\mathbb{Q} \subset K$.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Seien $K \subset L$, $L \subset F$ zwei galoische Körpererweiterungen. Zeigen Sie: Falls für jedes $\varphi \in \mathrm{Aut}_K(L)$ ein $\varphi_* \in \mathrm{Aut}_K(F)$ existiert mit $\varphi_{*|L} = \varphi$, dann ist auch $K \subset F$ galoisch.
