

Übungen zur Vorlesung Algebra  
Sommersemester 2025

Blatt 12

Abgabetermin: Mittwoch, 16.07.2025, 10:00 Uhr

---

**Aufgabe 1**

( 5 + 5 = 10 Punkte)

Welche der folgenden Körpererweiterungen ist galoisch, welche nicht? Begründen Sie!

(a)  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$

(b)  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(i\sqrt{6}, \sqrt[3]{2})$

---

**Aufgabe 2**

(3 + 3 + 3 = 9 Punkte)

Sei  $K$  der Zerfällungskörper von  $X^5 - 1$  über  $\mathbb{Q}$ .

(a) Bestimmen Sie den Isomorphietyp von  $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ .

(b) Zeigen Sie,  $K|\mathbb{Q}$  ist galoisch.

(c) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper von  $K|\mathbb{Q}$  und skizzieren Sie den Zwischenkörperverband von  $K|\mathbb{Q}$  sowie den Untergruppenverband von  $\text{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ .

---

**Aufgabe 3**

(4 + 4 = 8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{17}})|\mathbb{Q}$  galoisch mit Galoisgruppe  $(\mathbb{Z}_{16}, +)$  ist.

*Hinweis:* Sie dürfen verwenden, dass das Polynom  $\sum_{j=0}^{16} X^j$  über  $\mathbb{Q}$  irreduzibel ist.

(b) Zeigen Sie, dass das reguläre 17-Eck konstruierbar ist.

*Hinweis:* Es ist nicht notwendig eine Konstruktion anzugeben, um Konstruierbarkeit zu beweisen.

---

**Aufgabe 4**

(4 Punkte)

Welchen Grad hat die Körpererweiterung  $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$  für  $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{5}}$ ?

---