UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung Algebra

Sommersemester 2025

Blatt 2

Abgabetermin: Mittwoch, 30.04.2025, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung 55, die auf einer Menge X mit 18 Elementen operiere. Zeige, dass es mindestens zwei Fixpunkte gibt.

Hinweis: Sei $G \times X \to X$ eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge X. Ein Element $x \in X$ heißt Fixpunkt, wenn für alle $g \in G$ gilt $g \cdot x = x$, d.h. $\mathrm{Stab}(x) = G$.

Aufgabe 2 (4 + 4 = 8 Punkte)

Es sei G eine Gruppe mit Automorphismenmenge $\mathrm{Aut}(G)$ und Menge der inneren Automorphismen $\mathrm{Inn}(G)$.

(a) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Aut}(G)$ eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen und $\mathrm{Inn}(G)$ ein Normalteiler ist.

(b) Bestimmen Sie für $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ und $G = \mathbb{Z}_4$ jeweils die Gruppen der inneren Autormorphsimen $\mathrm{Inn}(G)$ und der Automorphismen$\mathrm{Aut}(G)$ und die Quotientengruppe $\mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Stellen Sie die Klassengleichung für $G = \mathrm{Gl}_2(\mathbb{F}_2)$ auf (mit Begründung!).

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Der 2. Isomorphiesatz für Gruppen aus der Vorlesung besagt, dass für die Klein'sche Vierergruppe $K_4 := \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, die alternierende Gruppe $\mathbb{A}_4$ und die symmetrische Gruppe S_4 folgende Isomorphie gilt:

$$(S_4/K_4)/(\mathbb{A}_4/K_4) \cong S_4/\mathbb{A}_4.$$

Rechnen Sie das „zu Fuß“ nach, d.h. bestimmen Sie für jedes Element in S_4 die Restklasse in S_4/K_4 und davon wiederum die Restklasse in $\mathbb{A}_4/K_4$ um es dann mit einer Restklasse von $S_4/\mathbb{A}_4$ in Beziehung zu setzen.
