UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung Algebra

Sommersemester 2025

Blatt 3 Abgabetermin: Mittwoch, 07.05.2025, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (3 + 2 +3 = 8 Punkte)

Sei G eine Gruppe mit Untergruppen H und K. Beweisen Sie:

(a) Die Menge $HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$ ist genau dann eine Untergruppe von G, wenn $HK = KH$ gilt.

(b) HK ist im Allgemeinen keine Untergruppe von G.

(c) Wenn H oder K ein Normalteiler in G ist, dann ist HK eine Untergruppe von G.

Aufgabe 2 (6 + 6 + 6* = 12 + 6* Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_4 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$ isomorph zur Symmetriegruppe des Quadrats ist, wobei φ die Abbildung $\mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_4), 1 \mapsto (x \mapsto -x)$ ist.

(b) Es sei D_5 die Symmetriegruppe eines (regelmäßigen) Fünfecks. Finden Sie eine Darstellung der D_5 als Untergruppe der S_5 und beweisen Sie die analoge Aussage zu (a).

(c)* Wozu ist $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$ isomorph?

Aufgabe 3 (4 + 4 + 2 +2 = 12 Punkte)

Sei G eine Gruppe.

(a) Bestimmen Sie mithilfe der Sylowsätze für $|G| = 40$ und $|G| = 56$ die Anzahl der p-Sylowgruppen für alle p Primteiler der Gruppenordnung.

(b) Eine Gruppe heißt einfach, wenn sie nur die trivialen Normalteiler $\{e_G\}$ und G enthält. Zeigen sie, unter Verwendung von Aufgabenteil (a), dass Gruppen G der Ordnung $|G| = 40$ und $|G| = 56$ nicht einfach sind.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe von G. Weiter sei U_H eine p-Sylowgruppe von H. Zeigen Sie, dass es dann eine p-Sylowgruppe U von G gibt mit $U_H = U \cap H$.
