

Übungen zur Vorlesung Algebra
Sommersemester 2025

Blatt 3

Abgabetermin: Mittwoch, 07.05.2025, 10:00 Uhr

Aufgabe 1

(3 + 2 + 3 = 8 Punkte)

Sei G eine Gruppe mit Untergruppen H und K . Beweisen Sie:

- (a) Die Menge $HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$ ist genau dann eine Untergruppe von G , wenn $HK = KH$ gilt.
 - (b) HK ist im Allgemeinen keine Untergruppe von G .
 - (c) Wenn H oder K ein Normalteiler in G ist, dann ist HK eine Untergruppe von G .
-

Aufgabe 2

(6 + 6 + 6* = 12 + 6* Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_4 \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_2$ isomorph zur Symmetriegruppe des Quadrats ist, wobei φ die Abbildung $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_4), 1 \mapsto (x \mapsto -x)$ ist.
 - (b) Es sei D_5 die Symmetriegruppe eines (regelmäßigen) Fünfecks. Finden Sie eine Darstellung der D_5 als Untergruppe der S_5 und beweisen Sie die analoge Aussage zu (a).
 - (c)* Wozu ist $\mathbb{Z}_n \rtimes \mathbb{Z}_2$ isomorph?
-

Aufgabe 3

(4 + 4 + 2 + 2 = 10 Punkte)

Sei G eine Gruppe.

- (a) Bestimmen Sie mithilfe der Sylowsätze für $|G| = 40$ und $|G| = 56$ die Anzahl der p -Sylowgruppen für alle p Primteiler der Gruppenordnung.
 - (b) Eine Gruppe heißt einfach, wenn sie nur die trivialen Normalteiler $\{e_G\}$ und G enthält. Zeigen sie, unter Verwendung von Aufgabenteil (a), dass Gruppen G der Ordnung $|G| = 40$ und $|G| = 56$ nicht einfach sind.
-

Aufgabe 4

(8 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe von G . Weiter sei U_H eine p -Sylowgruppe von H . Zeigen Sie, dass es dann eine p -Sylowgruppe U von G gibt mit $U_H = U \cap H$.
