UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung Algebra

Sommersemester 2025

Blatt 4

Abgabetermin: Mittwoch, 14.05.2025, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe und p der kleinste Primteiler der Gruppenordnung. Die Gruppe G habe einen Normalteiler N der Ordnung p. Zeigen Sie, dass G ein nichttriviales Zentrum hat.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei p prim und N ein Normalteiler mit $|N| = p$ in einer endlichen Gruppe G. Zeigen Sie, dass N in jeder p-Sylowgruppe von G enthalten ist.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 4 = 8 Punkte)

(a) Die Symmetriegruppe D_n eines regelmäßigen n-Ecks nennt man auch die Diedergruppe mit $2n$ Elementen. Für welche n ist die folgende aufsteigende Kette von Untergruppen eine Kompositionsreihe oder Subnormalteilerkette?

$$\{\mathrm{id}\} \subset \{\text{ Drehungen eines regelmäßigen } n\text{-Ecks}\} \subset D_n$$

(b) Zeigen Sie, dass D_n auflösbar ist.

(c) Geben Sie eine Kompositionsreihe von D_{30} an (mit Begründung).

Aufgabe 4 (3 + 3 = 6 Punkte)

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Jeder endliche nullteilerfreie Ring ist ein Körper.

(b) Jeder endliche Ring lässt sich als Vereinigung der Menge seiner Nullteiler und der Menge seiner Einheiten schreiben.
