UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung Algebra

Sommersemester 2025

Blatt 5 Abgabetermin: Mittwoch, 21.05.2025, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei R ein Hauptidealring und $0 \neq a \in R \setminus R^*$. Weiter sei I das von a erzeugte Hauptideal. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) I ist ein maximales Ideal in R.

(ii) I ist ein Primideal in R.

(iii) a ist irreduzibel.

Aufgabe 2 (3 + 4 = 7 Punkte)

Es sei $R = \mathbb{Z}[i]$.

(a) Zeigen Sie, dass der Chinesische Restsatz einen Isomorphismus $\phi : R/(7-11i) \to R/(3+5i) \times R/(1+2i)$ liefert.

(b) Bestimmen Sie das Urbild $x \in R/(7-11i)$ von $(\overline{1+i}, \overline{2+i}) \in R/(3+5i) \times R/(1+2i)$ unter ϕ.

Aufgabe 3 (3 + 3 = 6 Punkte)

Finden Sie jeweils im Ring R ein Ideal $I = \langle f_1, ..., f_n \rangle$, $n \geqslant 2$, das kein Hauptideal ist (begründen Sie, dass ihr gewähltes Ideal kein Hauptideal ist) und berechnen Sie für die Erzeuger f_i des Ideals ggT und kgV (falls existent).

(a) $R = \mathbb{Z}[x]$.

(b) $R = \mathbb{R}[x, y]$.

Aufgabe 4 (2 + 4 + 1 = 7 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

(a) Welches der folgenden Ausdrücke sind Polynome? Begründen Sie!

- $\prod_{k=0}^{25} (\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k x^i)^k$, wobei $a_i \in R$.
- $\sum_{i=1}^{k} b_i x^\alpha y^\beta$, wobei $k \in \mathbb{N}$, $b_i \in \mathrm{Math}(2 \times 2, R)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^k$.
- $\sum_{i=5}^{10} \prod_{k \geqslant i} c_i x_k^i$, wobei $c_i \in R[y_1, ..., y_n]$.
- Betrachten Sie für $m = (1, 3, 4) \in \mathbb{N}^3$ den Ausdruck: $\sum_{k \leqslant m} \binom{m_1}{k_1}\binom{m_2}{k_2}\binom{m_3}{k_3} x^k y^{m-k}$, wobei $k \leqslant m \Leftrightarrow k_i \leqslant m_i \forall i$. Finden sie angelehnt an die Multiindexschreibweise aus der Vorlesung eine vereinfachte Darstellung des Ausdrucks. Handelt es sich dabei um ein Polynom über $\mathbb{C}$?

(b) Zeigen Sie, das Ideal $I = \langle x_i^i | i \in \mathbb{N} \rangle$ in $R = \mathbb{R}[x_i | i \in \mathbb{N}]$ ist nicht endlich erzeugt.

(c) Ist $\mathbb{Z}[x_n | n \in \mathbb{N}]$ noethersch? Beweisen oder widerlegen Sie.
