UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung Algebra

Sommersemester 2025

Blatt 6

Abgabetermin: Mittwoch, 28.05.2025, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (4 + 4 = 8 Punkte)

Bestimmen Sie die Smith-Normalform von

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 & 3 & -4 \\ 7 & 6 & 2 & 9 & -2 \\ 7 & 4 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 5, \mathbb{Z})$$

und bestimmen Sie den Kern und das Bild der linearen Abbildung $\phi : \mathbb{Z}^5 \to \mathbb{Z}^3$, die durch A bezüglich der Standardbasen dargestellt wird.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und M ein R-Modul. Für eine Teilmenge $U \subset M$ ist das Modulerzeugnis definiert als der kleinste R-Untermodul von M der U enthält: $\langle U \rangle_R := \cap_{N \leqslant M, U \subset N} N$. Hierbei verwenden wir analog zur Ringen und Gruppen die Schreibweise $N \leqslant M$ dafür, dass N ein Untermodul von M ist. Zeigen Sie: $\langle U \rangle_R = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \,|\, n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in R, u_i \in U \,\forall i \in \{1, ..., n\}\}$.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Wenn R ein Körper ist, dann ist ein R-Modul dasselbe wie ein R-Vektorraum.

(b) $(\mathbb{Z}_9, +)$ ist frei als $\mathbb{Z}$-Modul.

(c) $(9\mathbb{Z}, +)$ ist frei als $\mathbb{Z}$-Modul.

(d) $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ zusammen mit $+$ sind frei als $\mathbb{Z}_6$-Moduln.

(e) Eine maximal linear unabhängige Teilmenge in einem R-Modul M ist eine Basis von M.

(f) Ein minimales Erzeugendensystem eines R-Moduls M ist eine Basis von M.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Es seien G eine endliche abelsche Gruppe und $\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^n \to G \to 0$ eine exakte Sequenz von $\mathbb{Z}$-Moduln, wobei φ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{Z}^n$ durch $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ mit $\det(A) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dargestellt wird. Zeigen Sie, dass die Gruppenordnung von G gegeben ist durch $\#G = |\det(A)|$. Hängt das Ergebnis von den gewählten Basen von $\mathbb{Z}^n$ ab? (und warum?)
