UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung Algebra

Sommersemester 2025

Blatt 7

Abgabetermin: Mittwoch, 04.06.2025, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 **(4 + 4 = 8 Punkte)**

(a) Finden Sie für $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{144} \times \mathbb{Z}_{1008}$ eine Darstellung wie in Satz 3.4.10. 3).

(b) Bestimmen Sie andersherum für $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{7^4} \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{7^2} \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{31} \times \mathbb{Z}_{47^2} \times \mathbb{Z}_{997} \times \mathbb{Z}_{997^3} \times \mathbb{Z}^2$ eine Darstellung wie in Satz 3.4.10. 2).

Aufgabe 2 **(3 + 3 = 6 Punkte)**

Sei R ein euklidischer Ring und $U \subset R^n$ ein Untermodul von Rang n. Für einen beliebigen R-Modul M definieren wir den *Annihilator* von M als $\mathrm{Ann}(M) = \{r \in R \,|\, r \cdot m = 0 \,\forall m \in M\}$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Ann}(M)$ ist ein Ideal in R.

(b) Es gilt $\mathrm{Ann}(R^n/U) = d_n R$, wobei d_n der bis auf Einheiten in R eindeutig bestimmt größte Elementarteiler von R^n/U ist.

Aufgabe 3 **(4 + 4 = 8 Punkte)**

Bestimmen Sie die Elementarteiler von

$$A := \begin{pmatrix} X-1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & X-2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & X-3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R}[X])$$

und die Jordan-Normalform von

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 **(4 + 4 = 8 Punkte)**

(a) Sei $R = K[X]$ für einen Körper K, $A \in \mathrm{Mat}(n, K)$ eine Matrix und $U = (X \cdot 1_n - A)K[X]^n$. Zeigen Sie, dass der größte Elementarteiler von R^n/U gerade das Minimalpolynomvon A ist.

(b) Zeigen Sie, $K[X]/\langle (X-a)^2(X-b) \rangle \cong K^3$ für $a \neq b$ und bestimmen Sie die Elementarteiler von $K[X]^3/U$ für $U = (X \cdot 1_3 - A)K[X]^3$ mit $A := \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ und $a \neq b$.
