

Übungen zur Vorlesung Algebra
Sommersemester 2025

Blatt 9

Abgabetermin: Mittwoch, 25.06.2025, 10:00 Uhr

Aufgabe 1

(6 Punkte)

Es sei L/K eine Körpererweiterung vom Grad m ($L \subset \mathbb{C}$) und $f \in K[X]$ sei ein irreduzibles Polynom vom Grad n . Zeigen Sie: Sind m und n teilerfremd, dann ist auch $f \in L[X]$ irreduzibel.

Hinweis: Betrachte den Körper $L(\alpha)$, wobei α eine Nullstelle von f in $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 2

(3 + 4 + 3 + 1 = 11 Punkte)

Es sei K ein Körper.

- (a) Zeigen Sie, dass Polynome vom Grad 2 und 3 in $K[X]$ genau dann irreduzibel sind, wenn sie keine Nullstelle in K haben.
 - (b) Sind die Polynome $X^2 + X + 1$, $X^3 + X^2 + 1$, $X^3 + X^2 + X + 1$ und $X^4 + X^3 + X + 1$ über $\mathbb{Z}_2[X]$ irreduzibel? Bestimmen Sie ggf. ihre Zerlegung in irreduzible Polynome.
 - (c) Zeigen Sie, $f := X^5 + 2X^3 + 2$ ist irreduzibel über $\mathbb{Z}[X]$ und folgern Sie, dass f irreduzibel ist über $\mathbb{Q}[X]$.
 - (d) Geben Sie ein Polynom in $\mathbb{R}[X]$ von Grad 4 an, dass keine Nullstellen in $\mathbb{R}$ hat, aber reduzibel ist.
-

Aufgabe 3

(3 + 3 + 3 + 3 = 12 Punkte)

Es sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{7}} \in \mathbb{C}$ und $f = X^3 + X^2 - 2X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie:

- (a) ζ ist Nullstelle von $\sum_{i=0}^6 X^i$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass ζ Nullstelle von $X^7 - 1$ ist.
 - (b) $\alpha_1 := \zeta + \zeta^6$, $\alpha_2 := \zeta^2 + \zeta^5$ und $\alpha_3 := \zeta^3 + \zeta^4$ sind *reelle* Nullstellen von f .
 - (c) Folgern Sie aus (b), dass f irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist. (Sie dürfen dabei voraussetzen, dass $\alpha_i \notin \mathbb{Q}$ für $i = 1, 2, 3$.)
 - (d) Das reguläre 7-Eck lässt sich nicht mit Zirkel und Lineal aus der Menge $\{0, 1\}$ konstruieren.
-