UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Klausur: Algebra

Sommersemester 2020

Bearbeitungszeit: 2 Stunden 29.7.2020

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Name des Übungsleiters:

Punkte: (von den Korrektoren auszufüllen!)

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Aufgabe 6	Aufgabe 7	Aufgabe 8
von 9	von 7	von 7	von 6	von 9	von 8	von 8	von 6

erreichte Punkte (von 60): __________ **Note:** __________

Bitte beachten Sie:

- Handys müssen während der gesamten Klausur ausgeschaltet (**nicht** stummgeschaltet) werden! Smartwatches müssen während der Klausur abgelegt werden.
- Bearbeiten Sie pro Blatt höchstens eine Aufgabe und schreiben Sie die entsprechende **Aufgabennummer** und **Ihren Namen** auf **jedes Blatt**!
- Führen Sie die Beweise in allen Einzelheiten aus. Wenn Sie Sätze der Vorlesung anwenden, zitieren Sie diese (Angabe der Nummer ist nicht notwendig). Wo gerechnet werden muss, schreiben Sie nicht nur die Zahlen hin, sondern erklären und begründen Sie alles, was Sie tun.
- Nach dem Ende der Bearbeitungszeit von 2 Stunden müssen Sie **sämtliche** während des Tests beschriebenen Blätter (auch Schmierpapier), aber nicht Ihren erlaubten DIN A4 Spickzettel, abgeben.
- Die Ergebnisse können im URM eingesehen werden. Die Einsicht ist nur mit vorheriger Anmeldung über E-Mail bis 9 Uhr am 30.7.2020 unter Angabe triftiger Gründe möglich. Für die Einsicht wird Ihnen nach erfolgreicher Anmeldung eine Zeitslot zwischen 14 und 16 Uhr am 30.07.2020 zugeteilt.

Aufgabe 1 **(9 Punkte)**

Berechnen Sie die Smith-Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 9 \\ 6 & 9 & 2 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}).$$

Aufgabe 2 **(7 Punkte)**

Sei G eine Gruppe der Ordnung 21 und M eine Menge mit $|M| = 11$. Zeigen Sie: Jede Operation von G auf M hat mindestens einen Fixpunkt.

Aufgabe 3 **(7 Punkte)**

Beweisen Sie: Gruppen der Ordnung 66 sind nicht einfach.

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

Entscheiden Sie für jeden der folgenden $\mathbb{Z}_{12}$-Moduln, ob er frei ist. Beweisen Sie Ihre Behauptung und geben Sie für die freien Moduln jeweils eine Basis an:

a) $\mathbb{Z}_3$

b) $\mathbb{Z}_4$

c) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$

Aufgabe 5 **(9 Punkte)**

Prüfen Sie, ob die folgenden Polynome über den angegebenen Ringen irreduzibel sind. Geben Sie für reduzible Polynome die Zerlegung in irreduzible Polynome an.

a) $f_1 := X^3 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$,
$f_2 := X^4 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$

b) $g_1 := X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 14X + 2 \in \mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X]$
$g_2 := X^2 - 3X + 9 \in \mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X]$,
$g_3 := X^3 + 27 \in \mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 6 **(8 Punkte)**

Sei K ein Körper, $\mathrm{char}(K) \neq 2$, L eine Körpererweiterung von K. Seien $a \in L \setminus K$, $b \in L \setminus K(a)$, sodass $a^2, b^2 \in K$.
Zeigen Sie: $K(a+b) = K(a,b)$ und bestimmen Sie für $K(a+b)/K$ die Galoisgruppe mit allen Untergruppen und das Fixkörperdiagramm.

Aufgabe 7 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle abelschen Gruppen der Ordnung 108.

Aufgabe 8 **(6 Punkte)**

Sei K ein Körper. Sei L der Zerfällungskörper eines reduziblen Polynoms $f \in K[X]$ vom Grad $n > 0$.
Zeigen Sie: $\mathrm{Aut}_K(L) \subsetneqq \mathbb{S}_n$.