Blatt2_Aufgabe2

June 25, 2025

[1]:
```python
import sympy as sp
```

[2]:
```python
A = sp.Matrix([[-2, 0, 0, -1, 1], [2, 2, 1, 1, -1], [-4, -4, -2, -3, 2], [0, 0,
↪0, 0, 0], [-2, 0, 0, -1, 1]])
A
```

[2]:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -4 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

[3]:
```python
#bestimme charakteristisches Polynom
x = sp.symbols('x')
(x*sp.eye(5) - A).det()
#am besten mit Laplace Entwicklung nach der 4. Zeile
```

[3]:

$x^5 + x^4$

[4]:
```python
#Es gibt also 2 Eigenwerte: -1 mit algebraischer Vielfachheit 1
# und 0 mit Vielfachheit 4.
#Für die -1 ist nicht viel zu machen: wir sehen schon algebraische =
↪geometrische Vielfachheit und brauchen
#nur einen Eigenvektor dazu.
s5 = sp.Matrix((-sp.eye(5) - A).nullspace())
s5
```

[4]:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[5]:
```python
#Die folgenden beiden Eigenvektoren zum EW 0 sieht man der Matrix direkt an:
s1 = sp.Matrix([1, 0, 0, 0, 2])
s1
```

[5]:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

[6]:
```
s2 = sp.Matrix([0, 1, -2, 0, 0])
s2
```

[6]:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[16]:
```
#Die beiden sind offenbar linear unabhängig und damit wissen wir schon, dass␣
↪sich die vier 0en auf der
#Diagonalen der JNF von A auf mindestens 2 Jordankästchen verteilen müssen.␣
↪Schauen wir uns die Potenzen von -A an:
(-A)**2
```

[16]:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

[17]:
```
(-A)**3
```

[17]:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

[14]:
```
#Wir sehen also, dass der Rang von A^3 gleich 1, der von A^2 aber noch nicht.␣
↪Wir folgern,
#dass das größte Jordankästchen zum Eigenwert 0 Größe haben muss. Damit ist␣
↪klar, die JNF von A aussieht:
S, J = A.jordan_form()
J
```

[14]:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[18]:
```
#Nun bestimmen wir die Matrix S. Wir brauchen zunächst irgendeinen Vektor, der␣
↪nicht im Kern von -A^3 liegt, z.B.
s = sp.Matrix([1, 0, 0, 0, 0])
s
```

[18]:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[20]:
```
#Der Teil von S, der zu dem Jordankästchen der Größe 3 korrespondiert is nun␣
↪direkt gegeben als
S = ((-A)*(-A)*s).row_join((-A)*s).row_join(s)
S
```

[20]:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

[21]:
```
A*A*s
```

[21]:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

[22]:
```
A*s
```

[22]:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

[23]:
```
A**3
```

[23]:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

[24]:
```
A**4
```

[24]:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

```
[ ]:
```