

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1
Sommersemester 2025

Blatt 10

Abgabetermin: Mittwoch, 02.07. bis 12:00.

Aufgabe 1

(5 Punkte)

Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -13 & 8 & -1 \\ -4 & -2 & 6 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(5, \mathbb{Q})$$

aus Aufgabe 2 von Blatt 9 gegeben. Finden Sie eine Matrix $J \in \text{Mat}(5, \mathbb{Q})$ in Jordannormalform und eine Matrix $T \in \text{GL}_5(\mathbb{Q})$, sodass $J = T \cdot A \cdot T^{-1}$ gilt.

(Hinweis: Für Rechnungen dürfen Sie einen Computer verwenden. Der Rechenweg sollte in Ihrer Abgabe aber klar erkennbar sein. Außerdem sollten Sie die Hauptraumzerlegung von \mathbb{Q}^5 bezüglich A verwenden, nämlich:

$$\text{Hau}(A, 0) \oplus \text{Hau}(A, 2) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

die Sie in Aufgabe 2 von Blatt 10 berechnet haben. Außerdem kennen wir die folgenden reduzierten Zeilenstufenformen, nämlich

$$\begin{aligned} \text{redZSF}(A) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{redZSF}(A^2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{redZSF}(A - 2\mathbf{1}_5) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{redZSF}((A - 2\mathbf{1}_5)^2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

vom letzten Blatt.)

Aufgabe 2

(5 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Familie von nilpotenten Matrizen

$$A_t := \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \in \text{Mat}(6, \mathbb{C})$$

mit $t \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass alle A_t mit $t \neq 0$ die gleiche Jordannormalform J besitzen, während A_0 eine davon verschiedene Jordannormalform besitzt.

Aufgabe 3

(5 Punkte)

Sei $B \in \text{Mat}(2, \mathbb{C})$ eine Matrix. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C}) : A \mapsto BA.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\chi_f = \chi_B^2$ gilt.

(b) Folgern Sie: f ist genau dann diagonalisierbar, wenn B es ist.

Aufgabe 4

(5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_A und das Minimalpolynom μ_A der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(4, \mathbb{C}).$$

(b) Sei eine Matrix $B \in \text{Mat}(4, \mathbb{C})$, ihr charakteristische Polynom χ_B und ihr Minimalpolynom μ_B gegeben. Kann man mit diesen Angaben eine Jordannormalform von B eindeutig (d.h. bis auf Reihenfolge der Jordankästchen) bestimmen?