

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1
Sommersemester 2025

Blatt 11

Abgabetermin: Mittwoch, 09.07. bis 12:00.

Aufgabe 1

(3 Punkte)

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich dimensionaler euklidischer Raum und $U \subset V$ eine Teilmenge von V . Zeigen Sie, dass $(U^\perp)^\perp = \langle U \rangle$ gilt.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$ gegeben. Bestimmen Sie aus den Vektoren v_1, v_2, v_3 mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahrens eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

Aufgabe 3

(4 Punkte)

Sei für $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\langle x, y \rangle := 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

definiert.

- (a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert.
- (b) Berechnen Sie die Gramsche Matrix $M_E(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich der Standardbasis E von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4

(8 Punkte)

Sei $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq d$ mit Standardbasis $B_d := (1, x, \dots, x^d)$.

- (a) Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle_d := \int_0^1 f(x)g(x) \, dx$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ definiert.

- (b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$.
- (c) Berechnen Sie die Gramsche Matrix $M_{B_d}(\langle \cdot, \cdot \rangle_d)$ für alle $d \in \mathbb{N}$.