UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Prof. Hannah Markwig
Dr. Felix Röhrle

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Sommersemester 2025

Blatt 4

Abgabetermin: Mittwoch, 14.05. bis 12:00.

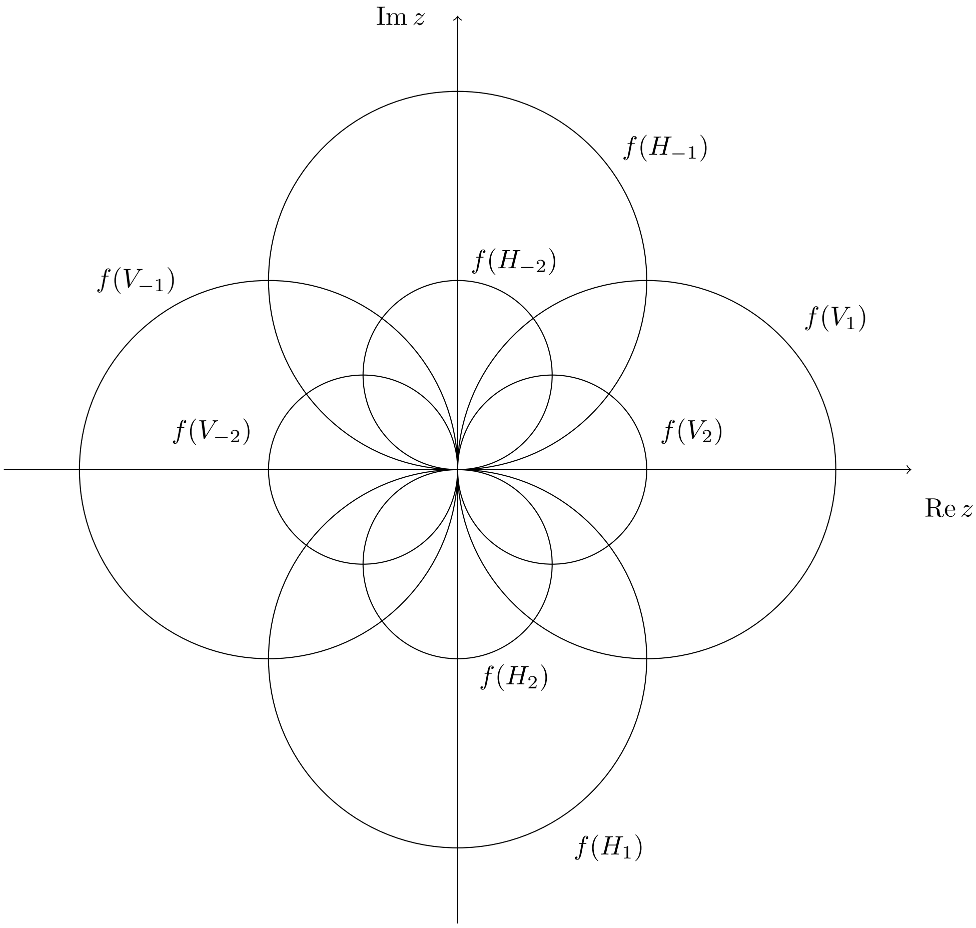
Aufgabe 1 (4 Punkte)

Betrachte die Teilmengen von $\mathbb{C}$:

$$H_a = \{x + ai \mid x \in \mathbb{R}\} \qquad \text{und} \qquad V_b = \{b + yi \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Visualisieren Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ indem Sie die Mengen $f(H_a)$ und $f(V_b)$ für $a, b \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ in der komplexen Zahlenebene skizzieren.

1. $f(z) = \overline{z}$
2. $f(z) = z^2$
3. $f(z) = \frac{z}{|z|}$ (nur für $a, b \in \{-1, 1\}$)
4. Beweisen Sie folgendes Bild für $f(z) = \frac{1}{z}$:



Aufgabe 2 (3 Punkte)

Finden Sie zwei Polynome $f \neq g$ in $\mathbb{Z}_2[x]$ vom Grad ≤ 2, sodass die zugehörigen Polynomfunktionen $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ und $g : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ übereinstimmen.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ wird das Maximum dieser beiden Zahlen mit $\max\{a, b\}$ bezeichnet.

Seien f, g Polynome über $\mathbb{C}$ vom Grad $\deg(f)$, bzw. $\deg(g)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\deg(f + g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$,

(b) $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$.

Wann gilt in der Ungleichung bei (a) Gleichheit?

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

(a) Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}} := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen jeweils Untervektorräume von V sind:

(1) $U_1 := \{f \mid f(-1) \cdot f(1) = 0\}$,

(2) $U_2 := \{f \mid f \text{ injektiv}\}$,

(3) $U_3 := \{f \mid f(1) = f(2)\}$.

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $U_\lambda := \{f \mid f(1) = \lambda\}$ ein Untervektorraum von V?

(c) Betrachten Sie $\mathbb{R}$-Vektorraum $W := \mathbb{R}^3$ und entscheiden Sie für die folgenden Mengen, ob es sich um Untervektorräume von W handelt.

(1) $U_4 := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_3 - \lambda_1 \end{pmatrix} \middle| \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$,

(2) $U_5 := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda + \mu^3 \\ \lambda - \mu^3 \end{pmatrix} \middle| \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$.