UNIVERSITÄT TÜBINGEN Prof. Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Dr. Felix Röhrle

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Sommersemester 2025

Blatt 5 Abgabetermin: Mittwoch, 21.05. bis 12:00.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen sind lineare Abbildungen?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^2 - 3y \\ 5y - 2x \\ x + 3y \end{pmatrix}$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4y + x \\ -3x \\ 7x + 7y \end{pmatrix}$

(c) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - 3 \\ -x + 2y \\ 5x \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei B_V eine Basis von V.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f(B_V)$ linear unabhängig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f genau dann surjektiv ist, wenn $f(B_V)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

(c) Schlussfolgern Sie, dass f genau dann bijektiv ist, wenn $f(B_V)$ eine Basis von W ist.

Seien nun V, W zusätzlich endlich dimensional von gleicher Dimension $n \in \mathbb{N}$.

(d) Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn f surjektiv ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$

2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

3. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^2$

4. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq (\mathbb{Z}_2)^3$

5. $\{(x - i)^n \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \subseteq \mathbb{C}[x]$

6. $\{f_1, \dots, f_4\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (vgl. Blatt 4 Aufgabe 4) mit

   - $f_1(x) = x^2$
   - $f_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
   - $f_3(x) = x$
   - $f_4(x) = |x|$

Aufgabe 4 **(3 Punkte)**

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass $v_1, \ldots, v_n \in V$ genau dann linear abhängig sind, wenn $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\lambda_j \in \mathbb{K}$ mit $j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}$ existieren, sodass die folgende Gleichheit gilt

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j v_j. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen für linear abhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ wie in (a) nicht jeder Vektor v_i durch die anderen wie in (1) dargestellt werden kann. Finden Sie dazu 3 Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$, die linear abhängig sind, aber $v_1 \neq \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ für alle Wahlen von $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.