UNIVERSITÄT TÜBINGEN Prof. Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Dr. Felix Röhrle

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Sommersemester 2025

Blatt 6 Abgabetermin: Mittwoch, 28.05. bis 12:00.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

In $\mathbb{R}^4$ seien $U := \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $x := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie eine Basis B von U. Was ist die Dimension von U?

(b) Falls möglich, tauschen Sie einen Vektor von B gegen x aus und tauschen Sie einen Vektor von B gegen y aus.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ und sei $\mathbb{R}[x]_{\leq n} := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \right\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome in $\mathbb{R}[x]$ vom Grad $\leq n$.

(a) Zeigen Sie, dass $B = (x^0, x^1, \ldots, x^n)$ eine Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ ist.

Die Abbildung $\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n},\ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$ heißt *formale Ableitung*.

(b) Zeigen Sie, dass $\frac{d}{dx}$ linear ist und bestimmen sie den Kern von $\frac{d}{dx}$.

(c) Bestimmen Sie ${}_BM_B(\frac{d}{dx})$.

(d) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq n}/\operatorname{Ker}(\frac{d}{dx})$.

(e) Was muss für zwei Polynome $f, g \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ gelten, damit ihre Restklassen $[f], [g] \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}/\operatorname{Ker}(\frac{d}{dx})$ linear unabhängig sind?

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass $B := \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist und betrachten Sie den Vektor $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, der bezüglich dieser Basis dargestellt ist. Wie sieht eine Darstellung von v bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ aus? Wir nehmen nun an, v sei bezüglich der Standardbasis dargestellt. Wie sieht eine Darstellung von v bezüglich B aus?

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei E die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und sei $B := \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix ${}_ET_B$, die Sie in der Vorlesung kennen gelernt haben.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, die durch die folgende Matrix gegeben ist:

$$ {}_EM_E(f) := \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. $$

Bestimmen Sie die Matrix ${}_EM_B(f)$.