UNIVERSITÄT TÜBINGEN Prof. Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Dr. Felix Röhrle

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Sommersemester 2025

Blatt 7

Abgabetermin: Mittwoch, 04.06. bis 12:00.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Im $\mathbb{R}^4$ seien Vektoren $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, c := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbb{R}^4/\langle v \rangle$ ohne eine Basis von $\mathbb{R}^4/\langle v \rangle$ anzugeben.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^4/\langle v \rangle$.

(c) Ist die Menge $\{[a], [b], [c]\} \subset \mathbb{R}^4/\langle v \rangle$ linear unabhängig?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R})$ gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von A.

(b) Sei $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{R}^4$, sodass $Ax = b$ gilt. Ist x eindeutig? Kann man für jedes $b' \in \mathbb{R}^4$ ein $x' \in \mathbb{R}^4$ finden, sodass $Ax' = b'$ gilt?

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Seien $U_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $U_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ zwei Unterräume von $\mathbb{R}^3$ und seien die Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ wie folgt gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie Gleichungen an, die U_1 (bzw. U_2) in $\mathbb{R}^3$ ausschneiden.

(b) Bestimmen Sie den Schnitt $U_1 \cap U_2$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(A) = U_1 \cap U_2$ gilt und bestimmen Sie den Rang von A.

(d) Finden Sie ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $\mathbb{R}^3/\,\mathrm{Ker}(A)$ zu $\mathbb{R}^k$ isomorph ist.

(e) Bestimmen Sie $\mathrm{Loes}(A, b)$. Geben Sie für $\mathrm{Loes}(A, b)$ sowohl eine Parametrisierung als auch eine Darstellung mittel $\mathrm{Ker}(A)$ an, wobei $\mathrm{Ker}(A)$ durch eine Basis gegeben sein soll.