Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1
Sommersemester 2025

Blatt 8

Abgabetermin: Mittwoch, 18.06. bis 12:00.

Aufgabe 1

(2 Punkte)

Sei die folgende Matrix $A \in \text{Mat}(4, \mathbb{R})$ gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von A .

Aufgabe 2

(5 Punkte)

Sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2, \mathbb{R})$$

gegeben. Sei außerdem die Determinante $\det(A)$ nicht Null.

- Berechnen Sie die Adjunkte $A^\#$ von A .
- Berechnen Sie A^{-1} und $A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ für einen beliebigen Vektor $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit ihrer Mitschrift aus der ersten Vorlesung der linearen Algebra 1.

Aufgabe 3

(5 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Weiterhin seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $A, B \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$.

- Zeigen Sie, dass $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$ gilt.
- Gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$?

Für eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ definieren wir die *Permutationsmatrix* $A_\sigma \in \text{Mat}(n, \mathbb{Q})$ wie folgt: Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sei

$$(A_\sigma)_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{falls } j = \sigma(i), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass $\det(A_\sigma) = \text{sign}(\sigma)$ gilt.

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Sei $A_{n,\lambda} \in \text{Mat}(n, \mathbb{K})$ die folgende Matrix mit Einträgen λ auf