UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Alheydis Geiger

Nachklausur: Algebra

Sommersemester 2020

Bearbeitungszeit: 2 Stunden 15.9.2020

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Name des Übungsleiters:

Punkte: (von den Korrektoren auszufüllen!)

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Aufgabe 6	Aufgabe 7	Aufgabe 8
von 8	von 6	von 7	von 6	von 9	von 8	von 8	von 8

erreichte Punkte (von 60): __________ **Note:** __________

Bitte beachten Sie:

- Handys müssen während der gesamten Klausur ausgeschaltet (**nicht** stummgeschaltet) werden! Smartwatches müssen während der Klausur abgelegt werden.
- Bearbeiten Sie pro Blatt höchstens eine Aufgabe und schreiben Sie die entsprechende **Aufgabennummer** und **Ihren Namen** auf **jedes Blatt**!
- Führen Sie die Beweise in allen Einzelheiten aus. Wenn Sie Sätze der Vorlesung anwenden, zitieren Sie diese (Angabe der Nummer ist nicht notwendig). Wo gerechnet werden muss, schreiben Sie nicht nur die Zahlen hin, sondern erklären und begründen Sie alles, was Sie tun.
- Nach dem Ende der Bearbeitungszeit von 2 Stunden müssen Sie **sämtliche** während des Tests beschriebenen Blätter (auch Schmierpapier), aber nicht Ihren erlaubten DIN A4 Spickzettel, abgeben.
- Die Ergebnisse können im URM eingesehen werden.

Aufgabe 1 **(8 Punkte)**

Berechnen Sie die Smith-Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 3 & 9 \\ 5 & 2 & 1 & 6 \\ 18 & 12 & 5 & 10 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z}).$$

Aufgabe 2 **(6 Punkte)**

Welche der folgenden Gleichungen können eine Klassengleichung einer Gruppe der Ordnung 15 darstellen? Begründen Sie ihre Entscheidung.

- $15 = (1+1+1) + 5 + 7$
- $15 = (1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1)$
- $15 = (1+1+1+1+1) + 5 + 5$

Dabei kommen die aufaddierten Einsen in Klammern von den Elementen aus dem Zentrum.

Aufgabe 3 **(7 Punkte)**

Beweisen Sie: Gruppen der Ordnung 84 sind nicht einfach.

Aufgabe 4 **(6 Punkte)**

a) Bestimmen Sie für $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{144} \times \mathbb{Z}_{175}$ eine Darstellung in der Form $\prod_{i=1}^n \mathbb{Z}/p_i^{r_i}$ wobei die p_i für $i = 1, ..., n$ nicht notwendigerweise verschiedene Primzahlen sind.

b) Bestimmen Sie die Elementarteiler für $G = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{7^4} \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{7^2} \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{31} \times \mathbb{Z}_{47^2} \times \mathbb{Z}_{89} \times \mathbb{Z}_{89^3} \times \mathbb{Z}^2$. (Sie müssen das Produkt der Primfaktoren nicht ausrechnen.)

Aufgabe 5 **(9 Punkte)**

Prüfen Sie, ob die folgenden Polynome über den angegebenen Ringen irreduzibel sind. Geben Sie für reduzible Polynome die Zerlegung in irreduzible Polynome an.

a) $f_1 := X^3 + X^2 + X + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$,
$f_2 := X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$,
$f_3 := X^3 + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$

b) $g_1 := X^4 + 25X^3 + 15X^2 + 10 \in \mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X]$,
$g_2 := X^4 - 4 \in \mathbb{Z}[X]$ und $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 6 **(8 Punkte)**

Zeigen Sie $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ und bestimmen Sie für $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ die Galoisgruppe mit allen Untergruppen und das Fixkörperdiagramm.

Aufgabe 7 **(8 Punkte)**

Bestimmen Sie die Anzahl und Isomorphietypen der 5-Sylowuntergruppen von $\mathbb{S}_5$.

Aufgabe 8 **(8 Punkte)**

Sei L/K eine galoissche Körpererweiterung. Zeigen Sie: Gibt es ein $a \in L$ mit $\sigma(a) \neq a$ für alle $\sigma \in \mathrm{Aut}_K(L) \setminus \{id\}$, so ist $L = K(a)$.