UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Sommersemester 2023

Blatt 10

Abgabetermin: Montag, 10.07.2023, 12:00 Uhr

Aufgabe 1* (5* Punkte)

Sei $N := (n_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ eine Matrix mit $n_{ij} = 0$ für alle i, j mit $i \geq j$. Zeigen Sie, dass N nilpotent ist und bestimmen Sie eine obere Schranke für den Nilpotenzindex von N.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -13 & 8 & -1 \\ -4 & -2 & 6 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5, \mathbb{Q}).$$

Sie dürfen verwenden, dass A genau die Eigenwerte 0 und 2 hat. Bestimmen Sie die Zerlegung in Haupträume von A von $\mathbb{Q}^5$.

(*Hinweis: Zum Potenzieren von Matrizen oder für ähnliche Rechnungen dürfen Sie einen Computer verwenden. Der Rechenweg sollte in Ihrer Abgabe aber klar erkennbar sein.*)

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R})$$

gegeben. Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, finden Sie eine Diagonalmatrix A', die konjugiert zu A ist und ein $T \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$, sodass $TAT^{-1} = A'$ gilt. Ist A' eindeutig?

Aufgabe 4 (2+3+1=6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ eine Matrix. Vergewissern Sie sich, dass das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{K}[x]$ von A Grad n hat und zeigen Sie, dass in χ_A

(a) der Koeffizient von x^n gleich $(-1)^n$,

(b) der Koeffizient von x^{n-1} gleich $(-1)^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n a_{ii}$ und

(c) der Koeffizient von x^0 gleich $\det(A)$ ist.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt.