

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1
Sommersemester 2023

Blatt 12

Abgabetermin: -, 12:00 Uhr

Aufgabe 1

Seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in \mathbb{R}^3 gegeben. Bestimmen Sie aus den Vektoren v_1, v_2, v_3 mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahrens eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 bezüglich des Standardskalarprodukts.

Ergebnis: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Aufgabe 2

Sei für $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\langle x, y \rangle := 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

definiert.

- (a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^3 definiert.
- (b) Berechnen Sie die Gramsche Matrix $M_E(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich der Standardbasis E von \mathbb{R}^3 .

Ergebnis zu (b): $M_E(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3

Sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(3, \mathbb{R})$$

gegeben. Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in O(3)$, die die symmetrische Matrix A diagonalisiert, d.h. eine Matrix S , sodass SAS^{-1} Diagonalgestalt hat.

Ergebnis: $S = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{\sqrt{45}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{-4}{\sqrt{45}} & \frac{5}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt.