

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1
Sommersemester 2023

Blatt 3

Abgabetermin: Montag, 15.05.2023, 12:00 Uhr

Aufgabe 1

(2+2=4 Punkte)

Es sei $\sigma \in \mathbb{S}_{15}$ gegeben als

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}.$$

- (a) Schreiben Sie σ als Produkt von Zykeln, sodass je zwei Zykeln dieser Darstellung kein gemeinsames Element besitzen.
- (b) Schreiben Sie σ als Produkt von Transpositionen und berechnen Sie $\text{sign}(\sigma)$.
-

Aufgabe 2

(3+2=5 Punkte)

- (a) Finden Sie alle Endomorphismen der Gruppe $(\mathbb{Z}_4, +)$. Welche davon sind Automorphismen?
- (b) Entscheiden Sie, ob die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{S}_6, \circ) &\rightarrow (\mathbb{Z}_6, +) \\ \sigma &\mapsto [\sigma(6)] \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 3

(2+4+3=9 Punkte)

Sei $(\mathbb{Z}, +)$ die Gruppe, die von der Addition auf \mathbb{Z} induziert wird.

- (a) Zeigen Sie, dass für alle $d \in \mathbb{N}$ die Menge $d\mathbb{Z}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ bildet.
- (b) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ von der Form $d\mathbb{Z}$ für ein $d \in \mathbb{N}$ ist.

Sei (G, \cdot) eine Gruppe mit neutralem Element id .

- (c) Zeigen Sie, dass (G, \cdot) abelsch ist, wenn $g \cdot g = \text{id}$ für alle $g \in G$ gilt.
-

Aufgabe 4

(4+2+2=8 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass es neben der Nullabbildung keinen weiteren Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Q}, +)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$ gibt.

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

- (b) $f : (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}, +), x \mapsto \frac{1}{x}$,
- (c) $g : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), x \mapsto e^x$.
-

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt.