UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Sommersemester 2023

Blatt 4

Abgabetermin: Montag, 22.05.2023, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (4+2=6 Punkte)

Es seien $w := -3 + 5 \cdot i$ und $z := \sqrt{3} - i$ komplexe Zahlen.

(a) Schreiben Sie die komplexen Zahlen (I) $w + z$, (II) $w \cdot z$, (III) $\overline{z}$, (IV) $\frac{1}{z}$, (V) $|z|$ in der Form $a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Skizzieren Sie z, $\frac{1}{z}$ und $\overline{z}$ in der komplexen Zahlenebene.

Aufgabe 2 (2+2+1+3+5=13 Punkte)

Betrachten Sie die Teilmenge $H := \{\mathrm{id}, (12) \circ (34), (13) \circ (24), (14) \circ (23)\}$ von $\mathbb{S}_4$.

(a) Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe von $\mathbb{S}_4$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von $\mathbb{S}_4$ ist.

(*Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und Zykel $(x_1 x_2 \dots x_k) \in \mathbb{S}_n$ gilt: $\sigma \circ (x_1 \dots x_k) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(x_1) \dots \sigma(x_k))\ \forall \sigma \in \mathbb{S}_n$.*)

Man kann die Gruppe $\mathbb{S}_4$ als Symmetriegruppe eines gleichseitigen Tetraeders mit Ecken $1, 2, 3$ und 4 auffassen. Sei M_{AB} für $1 \leq A, B \leq 4$, $A \neq B$, der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Wir definieren die Geraden $d_1 := M_{12}M_{34}$, $d_2 := M_{13}M_{24}$ und $d_3 := M_{14}M_{23}$ (siehe Abbildung).

(c) Erläutern sie geometrisch: $(12) \circ (34)$ ist eine Drehung um d_1, $(13) \circ (24)$ ist eine Drehung um d_2 und $(14) \circ (23)$ ist eine Drehung um d_3.

Sei σ eine beliebige Permutation aus $\mathbb{S}_4$, dann legt σ eine Bijektion $\varphi_\sigma : \{d_1, d_2, d_3\} \to \{d_1, d_2, d_3\}$ fest durch $\varphi_\sigma(M_{ij}M_{kl}) = M_{\sigma(i)\sigma(j)}M_{\sigma(k)\sigma(l)}$ für paarweise verschiedene $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned}
\varphi_{(12)}(d_1) &= \varphi_{(12)}(M_{12}M_{34}) = M_{21}M_{34} = d_1,\\
\varphi_{(12)}(d_2) &= \varphi_{(12)}(M_{13}M_{24}) = M_{23}M_{14} = d_3,\\
\varphi_{(12)}(d_3) &= \varphi_{(12)}(M_{14}M_{23}) = M_{24}M_{13} = d_2.
\end{aligned}$$

Zu jedem φ_σ bekommt man auf diese Weise eine eindeutig festgelegte Permutation $\Phi(\sigma) \in \mathbb{S}_3$ (z.B. $\Phi((12)) = (23) \in \mathbb{S}_3$, weil $\varphi_{(12)}$ d_2 mit d_3 vertauscht und d_1 auf sich selbst abbildet). Wir definieren eine Abbildung $\Phi : \mathbb{S}_4 \to \mathbb{S}_3$ durch $\sigma \mapsto \Phi(\sigma)$, wobei die $\Phi(\sigma)$ wie oben aus einem σ konstruiert wird.

(*Hinweis: Anschaulich tut die Abbildung Φ folgendes: Jedes $\sigma \in \mathbb{S}_4$ kann als Abbildung des Tetraeders auf sich selbst interpretiert werden (z.B. ist (12) ein Spiegelung an der Ebene senkrecht zu $\overline{12}$ durch M_{12}. Eine solche Abbildung bildet dann auch jede der Gerade d_i, $i = 1, 2, 3$, wieder auf ein anderes d_j ab. Dieser Vorgang liefert ebenfalls die Permutation $\Phi(\sigma)$.*)

(d) Zeigen Sie, dass für $\sigma = (34)$ und $\rho = (132)$ gilt: $\Phi(\sigma \circ \rho) = \Phi(\sigma) \circ \Phi(\rho)$, das heißt, die Homomorphieeigenschaft von Φ gilt somit für diese speziellen σ und ρ.

Die in (d) gezeigte Eigenschaft gilt auch für alle Wahlen für σ und ρ. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass Φ ein Homomorphismus ist.

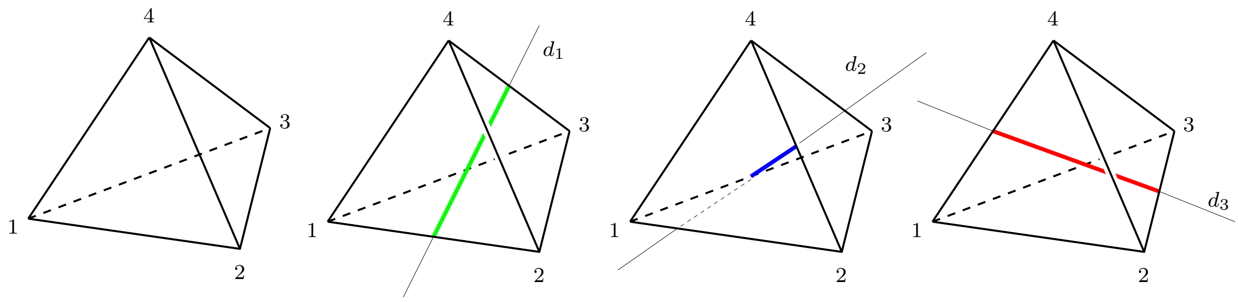

Abbildung 1: Ein gleichseitiger Tetraeder mit Ecken $1, 2, 3, 4$ und die Geraden d_1, d_2, d_3.

(e) Zeigen Sie, dass Φ surjektiv ist und dass H der Kern von Φ ist.

Aufgabe 3 (2+3+2=7 Punkte)

Wir definieren $\mathbb{A}_4$ als Untergruppe der $\mathbb{S}_4$ wie folgt

$$\mathbb{A}_4 := \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}.$$

Sei H jene Untergruppe der $\mathbb{S}_4$, die in Aufgabe 3 definiert wurde.

(a) Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von $\mathbb{A}_4$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede 2-elementige Untergruppe von H ein Normalteiler von H ist.

(c) Schlussfolgern Sie, dass die Eigenschaft ein Normalteiler zu sein nicht transitiv ist.

(*Hinweis: Sie müssen nicht zeigen, dass $\mathbb{A}_4$ eine Untergruppe der $\mathbb{S}_4$ ist.*)

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt.