

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1
Sommersemester 2023

Blatt 5

Abgabetermin: Montag, 05.06.2023, 12:00 Uhr

Aufgabe 1

(2+3=5 Punkte)

- (a) Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| < 2 < |z|\}$.
- (b) Seien $a := 0, b := 2, c := 2+2i, d := 1+2i, e := i$ Punkte in der komplexen Zahlenebene. Beschreiben Sie alle Punkte im Fünfeck, das durch a, b, c, d, e definiert wird, mit Ungleichungen von komplexen Zahlen.
-

Aufgabe 2

(3 Punkte)

Finden Sie zwei Polynome $f \neq g$ in $\mathbb{Z}_2[x]$ vom Grad ≤ 2 , sodass die zugehörigen Polynomfunktionen $f : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ und $g : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ übereinstimmen.

Für ein Polynom $P := \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbb{C}[x]$ definieren wir die (*formale*) *Ableitung von P* durch $P' := \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$, wobei die (*formale*) *Ableitung eines konstanten Polynoms das Nullpolynom ist*. Außerdem definieren wir $P^{(1)} := P'$ und $P^{(k)} := (P^{(k-1)})'$. Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass die folgenden zwei Eigenschaften von (*formalen*) *Ableitungen* für je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{C}[x]$ gelten:

$$\text{Produktregel } (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \text{ und Kettenregel } (f(g))' = f'(g) \cdot g'.$$

Aufgabe 3

(5 Punkte)

Sei $P \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom, derart, dass ein $a \in \mathbb{C}$, ein $r \in \mathbb{N}_{>0}$ und ein Polynom $Q \in \mathbb{C}[x]$ existieren mit $P = (x - a)^r \cdot Q$ und $Q(a) \neq 0$. Zeigen Sie, dass $P^{(i)}(a) = 0$ für $i = 1, \dots, r - 1$ und $P^{(r)}(a) \neq 0$ gilt.

Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ wird das Maximum dieser beiden Zahlen mit $\max\{a, b\}$ bezeichnet.

Aufgabe 4

(3+2+1*=6 Punkte)

Seien f, g Polynome über \mathbb{C} vom Grad $\deg(f)$, bzw. $\deg(g)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) $\deg(f + g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$,
- (b) $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$.

*Wann gilt in der Ungleichung bei (a) Gleichheit?

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt.