UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Sommersemester 2023

Blatt 6 Abgabetermin: Montag, 12.06.2023, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (3+3+1+4=11 Punkte)

Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei B_V eine Basis von V.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f(B_V)$ linear unabhängig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f genau dann surjektiv ist, wenn $f(B_V)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

(c) Schlussfolgern Sie, dass f genau dann bijektiv ist, wenn $f(B_V)$ eine Basis von W ist.

Seien nun V, W zusätzlich endlich dimensional von gleicher Dimension $n \in \mathbb{N}$.

(d) Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn f surjektiv ist.

Aufgabe 2 (4+1=5 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass $v_1, \ldots, v_n \in V$ genau dann linear abhängig sind, wenn $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\lambda_j \in \mathbb{K}$ mit $j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}$ existieren, sodass die folgende Gleichheit gilt

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j v_j. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen für linear abhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ wie in (a) nicht jeder Vektor v_i durch die anderen wie in (1) dargestellt werden kann. Finden Sie dazu 3 Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$, die linear abhängig sind, aber $v_1 \neq \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ für alle Wahlen von $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (8+3=11 Punkte)

Seien $V := \mathbb{R}^\mathbb{R} := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ und $W := \mathbb{R}^3$ jeweils $\mathbb{R}$-Vektorräume wie in der Vorlesung und sei $\mathbb{K}^3$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.

(a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen jeweils Untervektorräume sind:

(1) $U_1 := \{f \mid f(-1) \cdot f(1) = 0\} \subset V$,

(2) $U_2 := \{f \mid f \text{ injektiv}\} \subset V$,

(3) $U_3 := \{f \mid f(1) = f(2)\} \subset V$,

(4) $U_4 := \{\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_3 - \lambda_1 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} \subset W$,

(5) $U_5 := \{\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda + \mu^3 \\ \lambda - \mu^3 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset W$,

(6) $U_6 := \{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \mid \lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0\} \subset \mathbb{K}^3$.

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $U_\lambda := \{f \mid f(1) = \lambda\}$ ein Untervektorraum von V?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen sind lineare Abbildungen?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - 3y \\ 5y - 2x \\ x + 3y \end{pmatrix}$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4y + x \\ -3x \\ 7x + 7y \end{pmatrix}$

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - 3 \\ -x + 2y \\ 5x \end{pmatrix}$

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt.