

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1
Sommersemester 2023

Blatt 8

Abgabetermin: Montag, 26.06.2023, 12:00 Uhr

Aufgabe 1

(1+3+2=6 Punkte)

Im \mathbb{R}^4 seien Vektoren $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

- (a) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbb{R}^4/\langle v \rangle$ ohne eine Basis von $\mathbb{R}^4/\langle v \rangle$ anzugeben.
- (b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^4/\langle v \rangle$.
- (c) Ist die Menge $\{[a], [b], [c]\} \subset \mathbb{R}^4/\langle v \rangle$ linear unabhängig?

Aufgabe 2

(3+2=5 Punkte)

Sei die folgende Matrix $A \in \text{Mat}(4, \mathbb{R})$ gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von A .
- (b) Sei $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{R}^4$, sodass $Ax = b$ gilt. Ist x eindeutig? Kann man für jedes $b' \in \mathbb{R}^4$ ein $x' \in \mathbb{R}^4$ finden, sodass $Ax' = b'$ gilt?

Aufgabe 3

(3+3+3+1*+3=13 Punkte)

Seien $U_1 := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ und $U_2 := \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ zwei Unterräume von \mathbb{R}^3 und seien die Matrix $A \in \text{Mat}(3, \mathbb{R})$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ wie folgt gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

- (a) Geben Sie Gleichungen an, die U_1 (bzw. U_2) in \mathbb{R}^3 ausschneiden.
- (b) Bestimmen Sie den Schnitt $U_1 \cap U_2$.
- (c) Zeigen Sie, dass $\text{Ker}(A) = U_1 \cap U_2$ gilt und bestimmen Sie den Rang von A .
- (d*) Finden Sie ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $\mathbb{R}^3/\text{Ker}(A)$ zu \mathbb{R}^k isomorph ist.
- (e) Bestimmen Sie $\text{Lös}(A, b)$. Geben Sie für $\text{Lös}(A, b)$ sowohl eine Parametrisierung als auch eine Darstellung mittel $\text{Ker}(A)$ an, wobei $\text{Ker}(A)$ durch eine Basis gegeben sein soll.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt.