UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Sommersemester 2023

Blatt 9

Abgabetermin: Montag, 03.07.2023, 12:00 Uhr

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei die folgende Matrix $A \in \operatorname{Mat}(4, \mathbb{R})$ gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von A.

Aufgabe 2 (2+2+2+0*=6 Punkte)

Sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(2, \mathbb{R})$$

gegeben. Sei außerdem die Determinante $\det(A)$ nicht Null.

(a) Berechnen Sie die Adjunkte $A^{\#}$ von A.

(b) Berechnen Sie A^{-1} und $A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ für einen beliebigen Vektor $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

(d*) Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit ihrer Mitschrift aus der ersten Vorlesung der linearen Algebra 1.

(*Hinweis: Bei (d) ist keine schriftliche Antwort verlangt.*)

Aufgabe 3 (1+1+3=5 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Weiterhin seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $A, B \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{K})$.

(a) Zeigen Sie, dass $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$ gilt.

(b) Gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$?

Für eine Permutation $\sigma \in \mathbb{S}_n$ definieren wir die *Permutationsmatrix* $A_\sigma \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{Q})$ wie folgt: Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei

$$(A_\sigma)_{i,j} := \begin{cases} 1 \text{ falls } j = \sigma(i), \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

(c) Zeigen Sie, dass $\det(A_\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma)$ gilt.

Aufgabe 4 (2+2=4 Punkte)

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Sei $A_{n,\lambda} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ die folgende Matrix mit Einträgen λ auf der Diagonalen, -1 auf den Nebendiagonalen und 0 sonst:

$$A_{n,\lambda} := \begin{pmatrix} \lambda & -1 & & & & \\ -1 & \lambda & -1 & & & \\ & -1 & \lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(a) Leiten Sie eine Rekursionsformel für $d_{n,\lambda} := \det(A_{n,\lambda})$ her, d.h. stellen Sie für $n > 1$ die Determinante $d_{n,\lambda}$ durch $d_{k,\lambda}$ mit $0 < k < n$ dar.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $d_{2+3k,1} = 0$.

Aufgabe 5* (4* Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Z})$ eine Matrix mit $\det(A) = \pm 1$. Zeigen Sie, dass $A^{-1} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Z})$ gilt.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt.