UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Sommersemester 2023

Präsenzübung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $M := \{1, 2, 3\}$ eine Menge. Wie viele Äquivalenzrelationen $R \subset M \times M$ gibt es?

Aufgabe 2 (4+4=8 Punkte)

Bringen Sie die Matrizen

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } M_2 := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

per Gauß-Algorithmus in reduzierte Zeilenstufenform.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Schreiben Sie folgendes lineares Gleichungssystem als Matrix. Bringen Sie diese Matrix in reduzierte Zeilenstufenform und lesen Sie anschließend die Lösung des Gleichungssystems ab.

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8 &= 0 \\ -6x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (2+3=5 Punkte)

(a) Die Aussage „Alle Katzen sind schwarz“ ist offensichtlich falsch. Dennoch wird sie im Folgenden bewiesen. Wo steckt der Fehler?

Sei $N \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Katzen auf der Erde. Wir nehmen an, dass für eine natürliche Zahl $n < N$ jede n-elementige Menge von Katzen nur schwarze Katzen beinhaltet. Sei M nun eine Menge von $n+1$ Katzen und k_1, k_2 zwei verschiedene Katzen in M . Dann ist $M\backslash\{k_1\}$ eine Menge mit n Katzen, die dann auf Grund unserer Induktionsvorraussetzung alle schwarz sind. Andererseits ist auch $M\backslash\{k_2\}$ eine Menge von n Katzen und k_1 eine Katze in $M\backslash\{k_2\}$. Wegen der Induktionsvorraussetzung wissen wir dann insbesondere, dass auch k_1 eine schwarze Katze ist. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion sind damit alle Katzen schwarz.

(b) Sei M eine Menge. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$, definiert als die Menge aller Teilmengen von M, genau 2^n Elemente enthält, falls M genau n Elemente enthält.

Das Repetitorium findet immer Freitag von 10-12 Uhr im Hörsaal N09 statt.