UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Christoph Goldner

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Wintersemester 2018/19

Blatt 1

Abgabetermin: Dienstag, 23.10.2018, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (2+2+4=8 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden logischen Aussagen.

(a) Die Aussage $a \implies b$ is äquivalent zu $\neg b \implies \neg a$.

(b) Die Aussage $a \implies b$ is äquivalent zu $\neg(\neg b \wedge a)$.

Seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie folgende Gleichheit

$$A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C).$$

(*Hinweis: Benutzen Sie Tabellen mit Wahrheitswerten, um die Aussagen in (a) und (b) zu beweisen. Für zwei Mengen A, B ist $A \backslash B$ definiert als die Menge von Elementen in A, die nicht in B enthalten sind.*)

Aufgabe 2 (4+4=8 Punkte)

Bringen Sie die Matrizen

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } M_2 := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

per Gauß-Algorithmus in reduzierte Zeilenstufenform.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Schreiben Sie folgendes lineares Gleichungssystem als Matrix. Bringen Sie diese Matrix in reduzierte Zeilenstufenform und lesen Sie anschließend die Lösung des Gleichungssystems ab.

$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8 &= 0 \\ -6x_1 + 6x_2 + 4x_3 \quad &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (2+3=5 Punkte)

(a) Die Aussage „Alle Katzen sind schwarz“ ist offensichtlich falsch. Dennoch wird sie im Folgenden bewiesen. Wo steckt der Fehler?

Sei $N \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Katzen auf der Erde. Wir nehmen an, dass für eine natürliche Zahl $n < N$ jede n-elementige Menge von Katzen nur schwarze Katzen beinhaltet. Sei M nun eine Menge von $n+1$ Katzen und k_1, k_2 zwei verschiedene Katzen in M . Dann ist $M \backslash \{k_1\}$ eine Menge mit n Katzen, die dann auf Grund unserer Induktionsvorraussetzung alle schwarz sind. Andererseits ist auch $M \backslash \{k_2\}$ eine Menge von n Katzen und k_1 eine Katze in $M \backslash \{k_2\}$. Wegen der Induktionsvorraussetzung wissen wir dann insbesondere, dass auch k_1 eine schwarze Katze ist. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion sind damit alle Katzen schwarz.

(b) Sei M eine Menge. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$, definiert als die Menge aller Teilmengen von M, genau 2^n Elemente enthält, falls M genau n Elemente enthält.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Die ersten Übungen bereits in der 2. Vorlesungswoche statt.
Das 1. Repetitorium findet Freitag, den 19.10., von 10-12 Uhr im Hörsaal N02 statt.