

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1  
Wintersemester 2018/19

Blatt 11

Abgabetermin: Dienstag, 15.1.2019, 10:15 Uhr

---

**Aufgabe 1**

**(5 Punkte)**

Sei  $N := (n_{ij}) \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$  eine Matrix mit  $n_{ij} = 0$  für alle  $i, j$  mit  $i \geq j$ . Zeigen Sie, dass  $N$  nilpotent ist und bestimmen Sie eine obere Schranke für den Nilpotenzindex von  $N$ .

---

**Aufgabe 2**

**(7 Punkte)**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -13 & 8 & -1 \\ -4 & -2 & 6 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(5, \mathbb{Q}).$$

Sie dürfen verwenden, dass  $A$  genau die Eigenwerte 0 und 2 hat. Bestimmen Sie die Zerlegung in Haupträume von  $A$  von  $\mathbb{Q}^5$ .

*(Hinweis: Zum Potenzieren von Matrizen oder für ähnliche Rechnungen dürfen Sie einen Computer verwenden. Der Rechenweg sollte in Ihrer Abgabe aber klar erkennbar sein.)*

---

**Aufgabe 3**

**(2+3+3=8 Punkte)**

Sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2, \mathbb{R})$$

gegeben.

- Bestimmen Sie das charakteristische Polynom  $\chi_A$  von  $A$  und faktorisieren Sie  $\chi_A$  in Linearfaktoren.
  - Geben Sie Basen für die Haupträume von  $A$  an.
  - Finden Sie eine Matrix  $J$  in Jordannormalform und ein  $T \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  mit  $J = T \cdot A \cdot T^{-1}$ .
- 

**Aufgabe 4**

**(6 Punkte)**

Sei  $A := J(n, \lambda)$  ein Jordankästchen der Größe  $n$  zum Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Bestimmen Sie alle invertierbaren Matrizen  $T \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , die mit  $A$  kommutieren, das heißt, für die gilt:

$$T \cdot A = A \cdot T.$$

---

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden. Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N02 statt. Mit \* gekennzeichnete Aufgaben und Punkte sind Zusatzaufgaben und -punkte.