UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Christoph Goldner

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Wintersemester 2018/19

Blatt 12 Abgabetermin: Dienstag, 22.1.2019, 10:15 Uhr

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -13 & 8 & -1 \\ -4 & -2 & 6 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & -3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5, \mathbb{Q})$$

aus Aufgabe 2 von Blatt 11 gegeben. Finden Sie eine Matrix $J \in \mathrm{Mat}(5, \mathbb{Q})$ in Jordannormalform und eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{Q})$, sodass $J = T \cdot A \cdot T^{-1}$ gilt.

(*Hinweis: Für Rechnungen dürfen Sie einen Computer verwenden. Der Rechenweg sollte in Ihrer Abgabe aber klar erkennbar sein. Außerdem sollten Sie die Hauptraumzerlegung von $\mathbb{Q}^5$ bezüglich A verwenden, nämlich:*

$$\mathrm{Hau}(A,0) \oplus \mathrm{Hau}(A,2) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \oplus \langle \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle,$$

die Sie in Aufgabe 2 von Blatt 11 berechnet haben. Außerdem kennen wir die folgenden reduzierten Zeilenstufenformen, nämlich

$$redZSF(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, redZSF(A^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$redZSF(A - 2\mathbb{1}_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, redZSF((A - 2\mathbb{1}_5)^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vom letzten Blatt.)

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Familie von nilpotenten Matrizen

$$A_t := \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathrm{Mat}(6, \mathbb{C})$$

mit $t \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass alle A_t mit $t \neq 0$ die gleiche Jordannormalform J besitzen, während A_0 eine davon verschiedene Jordannormalform besitzt.

Aufgabe 3 (4+4+2=10 Punkte)

(a) Sei $p \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom und sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ eine Matrix mit λ als Eigenwert. Zeigen Sie, dass $p(\lambda)$ ein Eigenwert der Matrix $p(A) \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ ist.

(b) Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass ein Polynom $q \in \mathbb{K}[x]$ vom Grad $\leq n-1$ existiert mit $q(A) = A^{-1}$.

(c) Benutzen Sie Teil (b), um die inverse Matrix von

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zu berechnen.

Aufgabe 4 **(2+2=4 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_A und das Minimalpolynom μ_A der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{C}).$$

(b) Sei eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{C})$, ihr charakteristische Polynom χ_B und ihr Minimalpolynom μ_B gegeben. Kann man mit diesen Angaben eine Jordannormalform von B eindeutig (d.h. bis auf Reihenfolge der Jordankästchen) bestimmen?

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N02 statt.