UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Christoph Goldner

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Wintersemester 2018/19

Blatt 13

Abgabetermin: Dienstag, 29.1.2019, 10:15 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $(V, < \cdot, \cdot >)$ ein euklidischer Raum und $U \subset V$ eine Teilmenge von V. Zeigen Sie, dass $\left(U^\perp\right)^\perp = \langle U \rangle$ gilt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^3$ gegeben. Bestimmen Sie aus den Vektoren v_1, v_2, v_3 mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahrens eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

Aufgabe 3 (3+2=5 Punkte)

Sei für $x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die Abbildung $< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$< x, y >:= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass $< \cdot, \cdot >$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert.

(b) Berechnen Sie die Gramsche Matrix $M_E(< \cdot, \cdot >)$ von $< \cdot, \cdot >$ bezüglich der Standardbasis E von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4 (3+6+2=11 Punkte)

Sei $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq d$ mit Standardbasis $B_d := (1, x, \ldots, x^d)$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$< f, g >_d := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ definiert.

(b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ bezüglich $< \cdot, \cdot >_2$.

(c) Berechnen Sie die Gramsche Matrix $M_{B_d}(< \cdot, \cdot >_d)$ für alle $d \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5* (2* Punkte)

Sei $(V, < \cdot, \cdot >)$ ein euklidischer Raum und sei $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \sqrt{< x, x >}$ die von $< \cdot, \cdot >$ induzierte Norm auf V. Zeigen Sie, dass

$$< x, y >= \frac{1}{4}\left(||x + y||^2 - ||x - y||^2\right)$$

für alle $x, y \in V$ gilt, d.h. man kann $< \cdot, \cdot >$ aus $|| \cdot ||$ zurückgewinnen.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden. Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N02 statt. Mit * gekennzeichnete Aufgaben und Punkte sind Zusatzaufgaben und -punkte.