UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Christoph Goldner

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Wintersemester 2018/19

Blatt 14

Aufgabe 1

Sei $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 mit Standardbasis $B := (1, x, x^2)$. Sei

$$< f, g >:= \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

das auf Blatt 13 definierte Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Sei die lineare Abbilung T durch

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} &\to \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \\ a_2x^2 + a_1x + a_0 &\mapsto a_1x \end{aligned}$$

gegeben, wobei $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass T nicht selbstadjungiert ist.

(b) Vergewissern Sie sich, dass die Abbilungsmatrix von T bezüglich B die Matrix

$$_BM_B(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist und dass $_BM_B(T)$ symmetrisch ist. Erklären Sie, warum dies kein Widerspruch dazu ist, dass T nicht selbstadjungiert ist.

Aufgabe 2

Sind die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$$

jeweils diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Entscheidungen ohne etwas zu rechnen.

Aufgabe 3

Sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$$

gegeben. Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in O(3)$, die die symmetrische Matrix A diagonalisiert, d.h. eine Matrix S, sodass SAS^{-1} Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 4

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass A genau dann positiv definit ist, wenn alle Eigenwerte von A positiv sind.

Dieses Blatt stellt auf mehrfachen Wunsch Aufgaben zum Kapitel 4.3 der Vorlesung bereit und wird nicht in den Übungen besprochen. Im Repetitorium am 8.2. werden bei Bedarf Lösungen zu diesem Blatt besprochen.