UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Christoph Goldner

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Wintersemester 2018/19

Blatt 4

Abgabetermin: Dienstag, 13.11.2018, 10:15 Uhr

Aufgabe 1 (2+2=4 Punkte)

Es sei $\sigma \in \mathbb{S}_{15}$ gegeben als

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}.$$

(a) Schreiben Sie σ als Produkt von Zykeln, sodass je zwei Zykel dieser Darstellung kein gemeinsames Element besitzen.

(b) Schreiben Sie σ als Produkt von Transpositionen und berechnen Sie $\operatorname{sign}(\sigma)$.

Aufgabe 2 (3+2=5 Punkte)

(a) Finden Sie alle Endomorphismen der Gruppe $(\mathbb{Z}_4, +)$. Welche davon sind Automorphismen?

(b) Entscheiden Sie, ob die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi : (\mathbb{S}_6, \circ) & \to & (\mathbb{Z}_6, +) \\ \sigma & \mapsto & [\sigma(6)] \end{array}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 3 (2+2+1+3+5=13 Punkte)

Betrachten Sie die Teilmenge $H := \{\mathrm{id}, (12)\circ(34), (13)\circ(24), (14)\circ(23)\}$ von $\mathbb{S}_4$.

(a) Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe von $\mathbb{S}_4$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von $\mathbb{S}_4$ ist.

(Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und Zykel $(x_1 x_2 \ldots x_k) \in \mathbb{S}_n$ gilt: $\sigma \circ (x_1 \ldots x_k) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(x_1) \ldots \sigma(x_k))\ \forall \sigma \in \mathbb{S}_n$.)

Man kann die Gruppe $\mathbb{S}_4$ als Symmetriegruppe eines gleichseitigen Tetraeders mit Ecken $1, 2, 3$ und 4 auffassen. Sei M_{AB} für $1 \leq A, B \leq 4$, $A \neq B$, der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Wir definieren die Geraden $d_1 := M_{12}M_{34}$, $d_2 := M_{13}M_{24}$ und $d_3 := M_{14}M_{23}$ (siehe Abbildung).

(c) Erläutern sie geometrisch: $(12)\circ(34)$ ist eine Drehung um d_1, $(13)\circ(24)$ ist eine Drehung um d_2 und $(14)\circ(23)$ ist eine Drehung um d_3.

Sei σ eine beliebige Permutation aus $\mathbb{S}_4$, dann legt σ eine Bijektion $\varphi_\sigma : \{d_1, d_2, d_3\} \to \{d_1, d_2, d_3\}$ fest durch $\varphi_\sigma(M_{ij}M_{kl}) = M_{\sigma(i)\sigma(j)}M_{\sigma(k)\sigma(l)}$ für paarweise verschiedene $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} \varphi_{(12)}(d_1) &= \varphi_{(12)}(M_{12}M_{34}) = M_{21}M_{34} = d_1, \\ \varphi_{(12)}(d_2) &= \varphi_{(12)}(M_{13}M_{24}) = M_{23}M_{14} = d_3, \\ \varphi_{(12)}(d_3) &= \varphi_{(12)}(M_{14}M_{23}) = M_{24}M_{13} = d_2. \end{aligned}$$

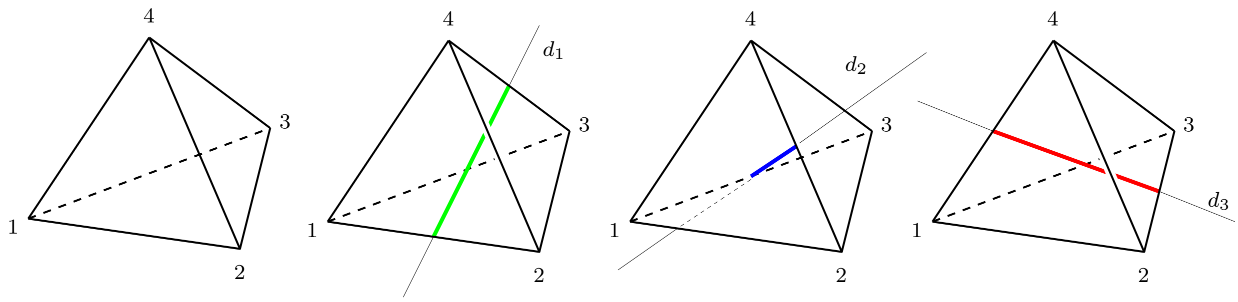

Abbildung 1: Ein gleichseitiger Tetraeder mit Ecken $1, 2, 3, 4$ und die Geraden d_1, d_2, d_3.

Zu jedem φ_σ bekommt man auf diese Weise eine eindeutig festgelegte Permutation $\Phi(\sigma) \in \mathbb{S}_3$ (z.B. $\Phi((12)) = (23) \in \mathbb{S}_3$, weil $\varphi_{(12)}$ d_2 mit d_3 vertauscht und d_1 auf sich selbst abbildet). Wir definieren eine Abbildung $\Phi : \mathbb{S}_4 \to \mathbb{S}_3$ durch $\sigma \mapsto \Phi(\sigma)$, wobei die $\Phi(\sigma)$ wie oben aus einem σ konstruiert wird.

(*Hinweis: Anschaulich tut die Abbildung Φ folgendes: Jedes $\sigma \in \mathbb{S}_4$ kann als Abbildung des Tetraeders auf sich selbst interpretiert werden (z.B. ist* (12) *ein Spiegelung an der Ebene senkrecht zu $\overline{12}$ durch M_{12}. Eine solche Abbildung bildet dann auch jede der Gerade d_i, $i = 1, 2, 3$, wieder auf ein anderes d_j ab. Dieser Vorgang liefert ebenfalls die Permutation* $\Phi(\sigma)$.)

(d) Zeigen Sie, dass für $\sigma = (34)$ und $\rho = (132)$ gilt: $\Phi(\sigma \circ \rho) = \Phi(\sigma) \circ \Phi(\rho)$, das heißt, die Homomorphieeigenschaft von Φ gilt somit für diese speziellen σ und ρ.

Die in (d) gezeigte Eigenschaft gilt auch für alle Wahlen für σ und ρ. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass Φ ein Homomorphismus ist.

(e) Zeigen Sie, dass Φ surjektiv ist und dass H der Kern von Φ ist.

Aufgabe 4 (2+3+2*=7 Punkte)

Wir definieren $\mathbb{A}_4$ als Untergruppe der $\mathbb{S}_4$ wie folgt

$$\mathbb{A}_4 := \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}.$$

Sei H jene Untergruppe der $\mathbb{S}_4$, die in Aufgabe 3 definiert wurde.

(a) Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von $\mathbb{A}_4$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede 2-elementige Untergruppe von H ein Normalteiler von H ist.

(c*) Schlussfolgern Sie, dass die Eigenschaft ein Normalteiler zu sein nicht transitiv ist.

(*Hinweis: Sie müssen nicht zeigen, dass $\mathbb{A}_4$ eine Untergruppe der $\mathbb{S}_4$ ist.*)

**Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden.
Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N02 statt. Mit * gekennzeichnete Aufgaben und Punkte sind Zusatzaufgaben und -punkte.
Abgaben sind in Gruppen von bis zu 3 Personen möglich.**