UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Christoph Goldner

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Wintersemester 2018/19

Blatt 5

Abgabetermin: Dienstag, 20.11.2018, 10:15 Uhr

Aufgabe 1 (4+2+2+3=11 Punkte)

Es seien $w := -3 + 5 \cdot i$ und $z := \sqrt{3} - i$ komplexe Zahlen.

(a) Schreiben Sie die komplexen Zahlen (I) $w + z$, (II) $w \cdot z$, (III) $\overline{z}$, (IV) $\frac{1}{z}$, (V) $|z|$ in der Form $a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Skizzieren Sie z, $\frac{1}{z}$ und $\overline{z}$ in der komplexen Zahlenebene.

(c) Skizzieren Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| < 2 < |z|\}$.

(d) Seien $a := 0, b := 2, c := 2+2i, d := 1+2i, e := i$ Punkte in der komplexen Zahlenebene. Beschreiben Sie alle Punkte im Fünfeck, das durch a, b, c, d, e definiert wird, mit Ungleichungen von komplexen Zahlen.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Finden Sie zwei Polynome $f \neq g$ in $\mathbb{Z}_2[x]$ vom Grad ≤ 2, sodass die zugehörigen Polynomfunktionen $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ und $g : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ übereinstimmen.

Für ein Polynom $P := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{C}[x]$ definieren wir die *(formale) Ableitung von P* durch $P' := \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$, wobei die (formale) Ableitung eines konstanten Polynoms das Nullpolynom ist. Außerdem definieren wir $P^{(1)} := P'$ und $P^{(k)} := \left(P^{(k-1)}\right)'$. Sie dürfen ohne Beweis annehmen, dass die folgenden zwei Eigenschaften von (formalen) Ableitungen für je zwei Polynome $f, g \in \mathbb{C}[x]$ gelten:

$$\textit{Produktregel } (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \text{ und } \textit{Kettenregel } \ (f(g))' = f'(g) \cdot g'.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $P \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom, derart, dass ein $a \in \mathbb{C}$, ein $r \in \mathbb{N}_{>0}$ und ein Polynom $Q \in \mathbb{C}[x]$ existieren mit $P = (x - a)^r \cdot Q$ und $Q(a) \neq 0$. Zeigen Sie, dass $P^{(i)}(a) = 0$ für $i = 1, \ldots, r - 1$ und $P^{(r)}(a) \neq 0$ gilt.

Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ wird das Maximum dieser beiden Zahlen mit $\max\{a, b\}$ bezeichnet.

Aufgabe 4 (3+2+1*=6 Punkte)

Seien f, g Polynome über $\mathbb{C}$ vom Grad $\deg(f)$, bzw. $\deg(g)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\deg(f + g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$,

(b) $\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$.

*Wann gilt in der Ungleichung bei (a) Gleichheit?

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden. Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N02 statt. Mit * gekennzeichnete Aufgaben und Punkte sind Zusatzaufgaben und -punkte.