UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Christoph Goldner

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Wintersemester 2018/19

Blatt 6

Abgabetermin: Dienstag, 27.11.2018, 10:15 Uhr

Aufgabe 1 (8+3=11 Punkte)

Seien $V := \mathbb{R}^\mathbb{R} := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ und $W := \mathbb{R}^3$ jeweils $\mathbb{R}$-Vektorräume wie in der Vorlesung und sei $\mathbb{K}^3$ ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.

(a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen jeweils Untervektorräume sind:

(1) $U_1 := \{f \mid f(-1) \cdot f(1) = 0\} \subset V$,

(2) $U_2 := \{f \mid f \text{ injektiv}\} \subset V$,

(3) $U_3 := \{f \mid f(1) = f(2)\} \subset V$,

(4) $U_4 := \{\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_3 - \lambda_1 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} \subset W$,

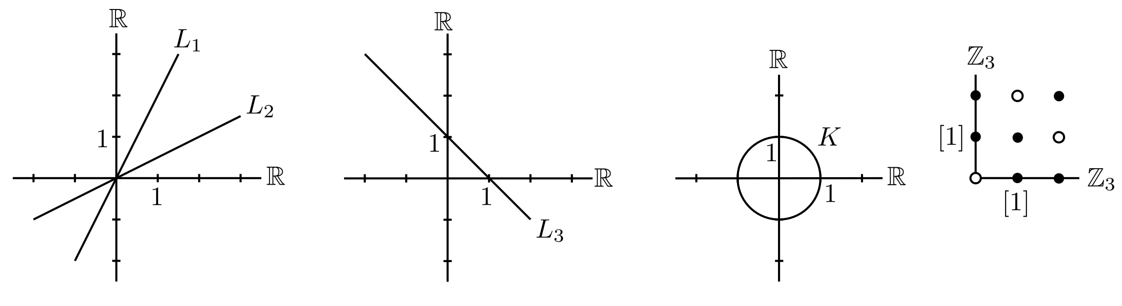
(5) $U_5 := \{\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda + \mu^3 \\ \lambda - \mu^3 \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset W$,

(6) $U_6 := \{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \mid \lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0\} \subset \mathbb{K}^3$.

(b) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $U_\lambda := \{f \mid f(1) = \lambda\}$ ein Untervektorraum von V?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Entscheiden Sie, ob $L_1, L_2, L_1 \cup L_2, L_3, K \subset \mathbb{R}^2$ Untervektorräume sind und ob die Menge $M \subset (\mathbb{Z}_3)^2$ der weißen Punkte im rechten Bild ein Untervektorraum vom Vektorraum $(\mathbb{Z}_3)^2$ über $\mathbb{Z}_3$ ist.



Aufgabe 3 (4 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen sind lineare Abbildungen?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - 3y \\ 5y - 2x \\ x + 3y \end{pmatrix}$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4y + x \\ -3x \\ 7x + 7y \end{pmatrix}$

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-3 \\ -x+2y \\ 5x \end{pmatrix}$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Wie viele lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = n$ und $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = n+1$ gibt es? Bestimmen Sie den Kern einer solchen Abbildung.

Für einen Ring R lässt sich dessen *Polynomring* $R[x]$ analog zu dem Fall definieren in dem R ein Körper ist.

Aufgabe 5* (2* Punkte)

Zeigen Sie, dass es einen Ring R und Polynome $f, g \in R[x]$ gibt, sodass $\deg(f \cdot g) \neq \deg(f) + \deg(g)$.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden. Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N02 statt. Mit * gekennzeichnete Aufgaben und Punkte sind Zusatzaufgaben und -punkte.