UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Christoph Goldner

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Wintersemester 2018/19

Blatt 7

Abgabetermin: Dienstag, 04.12.2018, 10:15 Uhr

Aufgabe 1 (3+3+1+4=11 Punkte)

Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei B_V eine Basis von V.

(a) Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f(B_V)$ linear unabhängig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f genau dann surjektiv ist, wenn $f(B_V)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

(c) Schlussfolgern Sie, dass f genau dann bijektiv ist, wenn $f(B_V)$ eine Basis von W ist.

Seien nun V, W zusätzlich endlich dimensional von gleicher Dimension $n \in \mathbb{N}$.

(d) Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn f surjektiv ist.

Aufgabe 2 (4+1=5 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie, dass $v_1, \ldots, v_n \in V$ genau dann linear abhängig sind, wenn $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\lambda_j \in \mathbb{K}$ mit $j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}$ existieren, sodass die folgende Gleichheit gilt

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j v_j. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen für linear abhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ wie in (a) nicht jeder Vektor v_i durch die anderen wie in (1) dargestellt werden kann. Finden Sie dazu 3 Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$, die linear abhängig sind, aber $v_1 \neq \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ für alle Wahlen von $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (4+3=7 Punkte)

In $\mathbb{R}^4$ seien $U := \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ und $x := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie eine Basis B von U. Was ist die Dimension von U?

(b) Falls möglich, tauschen Sie einen Vektor von B gegen x aus und tauschen Sie einen Vektor von B gegen y aus.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien U_1, U_2 Untervektorräume mit $\dim_{\mathbb{K}} U_1 = \dim_{\mathbb{K}} U_2$. Zeigen Sie, dass es einen Untervektorraum $W \subset V$ gibt, sodass $V = U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$ gilt.

(*Hinweis: Starten Sie mit den folgenden Basen:* $(u_1, \ldots, u_r)$ *Basis von* $U_1 \cap U_2$, $(b_1, \ldots, b_n)$ *Basis von* U_1 *und* $(c_1, \ldots, c_n)$ *Basis von* U_2. *Schlussfolgern Sie, dass (bei geeigneter Indizierung der* b_i *und* c_i*)* $(u_1, \ldots, u_r, b_{r+1}, \ldots, b_n, c_{r+1}, \ldots, c_n)$ *eine*

Basis von $U_1 + U_2$ ist. Definieren Sie W, indem sie eine Basis für W angeben, die von der Form $(b_{r+1} + c_{r+1}, \ldots, b_n + c_n, w_{x+1}, \ldots, w_m)$ mit geeigneten w_i ist.)

Aufgabe 5* (5* Punkte)

Zeigen Sie, dass $B := \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist und betrachten Sie den Vektor $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, der bezüglich dieser Basis dargestellt ist. Wie sieht eine Darstellung von v bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ aus?

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden. Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N02 statt. Mit * gekennzeichnete Aufgaben und Punkte sind Zusatzaufgaben und -punkte.