UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Christoph Goldner

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Wintersemester 2018/19

Blatt 8

Abgabetermin: Dienstag, 11.12.2018, 10:15 Uhr

Aufgabe 1 **(2+3=5 Punkte)**

Sei E die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und sei $B := \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$ eine weitere Basis des $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix ${}_ET_B$, die Sie in der Vorlesung kennen gelernt haben.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, die durch die folgende Matrix gegeben ist:

$$ {}_EM_E(f) := \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. $$

Bestimmen Sie die Matrix ${}_EM_B(f)$.

Aufgabe 2 **(2+2+3+3=10 Punkte)**

Sei E die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und sei φ ein Endomorphismus von $\mathbb{R}^2$, der durch

$$ {}_EM_E(\varphi) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} $$

gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\varphi \circ \varphi = \varphi$ gilt.

(b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von φ.

(c) Zeigen Sie, dass die Menge $M := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(z) = z\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist und geben Sie eine Basis von M an.

(d) Finden Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^2$, sodass

$$ {}_BM_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} $$

gilt.

Aufgabe 3 **(1+3+2=6 Punkte)**

Im $\mathbb{R}^4$ seien Vektoren $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, c := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbb{R}^4/\langle v \rangle$ ohne eine Basis von $\mathbb{R}^4/\langle v \rangle$ anzugeben.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}^4/\langle v \rangle$.

(c) Ist die Menge $\{[a], [b], [c]\} \subset \mathbb{R}^4/\langle v \rangle$ linear unabhängig?

Aufgabe 4 **(2+3+2+2+3*=12 Punkte)**

Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ und sei $\mathbb{R}[x]_{\leq n} := \{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome in $\mathbb{R}[x]$ vom Grad $\leq n$.

(a) Zeigen Sie, dass $B = (x^0, x^1, \dots, x^n)$ eine Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ ist.

Die Abbildung $\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \to \mathbb{R}[x]_{\leq n}, \sum_{i=0}^n a_i x^i \mapsto \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$ heißt *formale Ableitung.*

(b) Zeigen Sie, dass $\frac{d}{dx}$ linear ist und bestimmen sie den Kern von $\frac{d}{dx}$.

(c) Bestimmen Sie ${}_B M_B(\frac{d}{dx})$.

(d) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq n}/\operatorname{Ker}(\frac{d}{dx})$.

(e*) Was muss für zwei Polynome $f, g \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}$ gelten, damit ihre Restklassen $[f], [g] \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}/\operatorname{Ker}(\frac{d}{dx})$ linear unabhängig sind?

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden. Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N02 statt. Mit * gekennzeichnete Aufgaben und Punkte sind Zusatzaufgaben und -punkte.