UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Christoph Goldner

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Wintersemester 2018/19

Blatt 9

Abgabetermin: Dienstag, 18.12.2018, 10:15 Uhr

Aufgabe 1 (2+3+2=7 Punkte)

Sei die folgende Matrix $A \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{R})$ gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A.

(b) Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} von A.

(c) Sei $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie ein $x \in \mathbb{R}^4$, sodass $Ax = b$ gilt. Ist x eindeutig? Kann man für jedes $b' \in \mathbb{R}^4$ ein $x' \in \mathbb{R}^4$ finden, sodass $Ax' = b'$ gilt?

Aufgabe 2 (3+3+3+1*+3=13 Punkte)

Seien $U_1 := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$ und $U_2 := \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ zwei Unterräume von $\mathbb{R}^3$ und seien die Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$ und der Vektor $b \in \mathbb{R}^3$ wie folgt gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie Gleichungen an, die U_1 (bzw. U_2) in $\mathbb{R}^3$ ausschneiden.

(b) Bestimmen Sie den Schnitt $U_1 \cap U_2$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(A) = U_1 \cap U_2$ gilt und bestimmen Sie den Rang von A.

(d*) Finden Sie ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $\mathbb{R}^3 / \mathrm{Ker}(A)$ zu $\mathbb{R}^k$ isomorph ist.

(e) Bestimmen Sie $\mathrm{Lös}(A, b)$. Geben Sie für $\mathrm{Lös}(A, b)$ sowohl eine Parametrisierung als auch eine Darstellung mittel $\mathrm{Ker}(A)$ an, wobei $\mathrm{Ker}(A)$ durch eine Basis gegeben sein soll.

Aufgabe 3 (1+1+3=5 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Weiterhin seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $A, B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$.

(a) Zeigen Sie, dass $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$ gilt.

(b) Gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$?

Für eine Permutation $\sigma \in \mathbb{S}_n$ definieren wir die *Permutationsmatrix* $A_\sigma \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q})$ wie folgt: Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sei

$$(A_\sigma)_{i,j} := \begin{cases} 1 \text{ falls } j = \sigma(i), \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

(c) Zeigen Sie, dass $\det(A_\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma)$ gilt.

Aufgabe 4 (2+2=4 Punkte)

Seien $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Sei $A_{n,\lambda} \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ die folgende Matrix mit Einträgen λ auf der Diagonalen, -1 auf den Nebendiagonalen und 0 sonst:

$$A_{n,\lambda} := \begin{pmatrix} \lambda & -1 & & & & \\ -1 & \lambda & -1 & & & \\ & -1 & \lambda & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(a) Leiten Sie eine Rekursionsformel für $d_{n,\lambda} := \det(A_{n,\lambda})$ her, d.h. stellen Sie für $n > 1$ die Determinante $d_{n,\lambda}$ durch $d_{k,\lambda}$ mit $0 < k < n$ dar.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $d_{2+3k,1} = 0$.

Aufgabe 5* (3* Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage. Für jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ und jedes $b \in \mathbb{R}^m$ gilt entweder $\#\,\mathrm{Lös}(A, b) = 0$, oder $\#\,\mathrm{Lös}(A, b) = 1$, oder $\#\,\mathrm{Lös}(A, b) = \infty$.

Die zusammengetackerten Übungsblätter können im Postfachzimmer A16 des C-Gebäudes im 3. Stock im Briefkasten des jeweiligen Übungsleiters abgegeben werden. Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N02 statt. Mit * gekennzeichnete Aufgaben und Punkte sind Zusatzaufgaben und -punkte.